ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,

PAR

UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES MAITRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR,
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE,
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY,
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE,
et de 1901 à 1917 par M. G. DARBOUX.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME TRENTE-SIXIÈME. — ANNÉE 1919.

(55e VOLUME DE LA COLLECTION.)

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1919

KRAUS REPRINT
Nendeln/Liechtenstein
1974

U. I. C. C.
FEB 21 1975
LIBRARY

140

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,

PAR

UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES MAITRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR,
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE,
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY,
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE,
et de 1901 à 1917 par M. G. DARBOUX.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME TRENTE-SIXIÈME. — ANNÉE 1919.

(55e VOLUME DE LA COLLECTION.)

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1919

KRAUS REPRINT
Nendeln/Liechtenstein
1974

Reprinted by permission of the original publishers

KRAUS REPRINT
A Division of
KRAUS-THOMSON ORGANIZATION LIMITED
Nendeln/Liechtenstein
1974

Printed in Germany
Lessingdruckerei Wiesbaden

COMITÉ DE RÉDACTION :

Sciences mathématiques.

MM.

P. Appell, de l'Institut.
E. Borel, Professeur à la Sorbonne.
E. Cartan, Professeur à la Sorbonne.
E. Goursat, Professeur à la Sorbonne.
J. Hadamard, de l'Institut.
G. Kœnigs, de l'Institut.
H. Lebesgue, Professeur à la Sorbonne.
P. Painlevé, de l'Institut.
E. Picard, de l'Institut.
E. Vessiot.

Sciences physiques.

MM.

H. Abraham, Professeur à la Sorbonne.
E. Bouty, de l'Institut.
M. Brillouin, Professeur au Collège de France.
A. Cotton.
R. Lespieau.
E. Péchard.
J. Violle, de l'Institut.

Sciences naturelles.

MM.

L. Bertrand.
G. Bonnier, de l'Institut.
J. Costantin, de l'Institut.
H. Houssay, Professeur à la Sorbonne.
Matruchot, Professeur à la Sorbonne.
E. Perrier, de l'Institut.
F. Wallerant, de l'Institut.

ADMINISTRATION :

MM. Émile Picard, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences..... *Directeur.*
Henri Abraham, Professeur à la Sorbonne ..... *Secrétaire.*
André Ducrot ..... *Trésorier.*

Digitized by the Internet Archive
in 2024

https://archive.org/details/ecole-normale-superieure-annales-scientifiques_1919_36

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

ÉTUDE
DE
LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE
DES
PARAMÈTRES PRINCIPAUX ET SECONDAIRES D'UN SYSTÈME
DANS LE CAS RÉGULIER D'INTÉGRATION PAR QUADRATURES

PAR M. ÉTIENNE DELASSUS.

Introduction.

Un système dans le cas régulier d'intégration par quadratures fait partie des systèmes à intégrale de force vive pour lesquels le théorème de Lagrange sur la stabilité se généralise facilement (1). Mais les paramètres secondaires ne figurant pas dans la portion G_0 de la fonction génératrice, les équilibres trouvés forment toujours des suites continues ; ils ne sont jamais isolés et le célèbre théorème en question ne s'y applique jamais.

Depuis longtemps les mathématiciens se sont efforcés de montrer, dans des cas de plus en plus généraux, que la réciproque du théorème de Lagrange est exacte, c'est-à-dire que si ce théorème ne montre pas la stabilité, il y a effectivement instabilité. Les résultats qui ont été obtenus dans cette voie sont relatifs à l'équilibre absolu, mais le théorème s'étendant aux équilibres relatifs, on est conduit à penser que,

(1) DELASSUS, *Leçons sur la dynamique des systèmes matériels*, Chap. III, Sect. III.

tout au moins dans le cas des fonctions de nature élémentaire qui ne présentent pas de singularités de nature exceptionnelle, l'équilibre paramétrique d'un système à intégrale des forces vives, qui est stable quand les conditions de Lagrange sont satisfaites, doit être instable quand ces conditions ne sont pas toutes vérifiées.

Si cette idée était exacte, tout équilibre paramétrique d'un système dans le cas régulier d'intégration devrait être instable. Le résultat principal de ce Mémoire est que cette idée est fausse.

Pour montrer que les équilibres ne sont pas toujours instables, on pourrait se borner à donner un exemple de cas où les équilibres sont stables. Il existe de tels exemples très simples, on en trouvera un à la fin du Mémoire, mais, pour les trouver, il faut y être conduit en quelque sorte par le hasard ou bien comme application d'une étude générale, et cette dernière marche, la seule possible d'ailleurs quand on ne soupçonne pas le résultat final, a l'avantage de montrer les cas où il y a stabilité et ceux où il y a instabilité.

Pour faire l'étude générale de la stabilité paramétrique d'un système dans le cas régulier, il est commode d'étudier séparément celle du paramètre principal et celle des paramètres secondaires. La différence essentielle de nature de ces deux sortes de paramètres conduit à deux études absolument distinctes.

L'étude de la stabilité du paramètre principal est, avec quelques modifications résultant de constantes arbitraires supplémentaires, identique à celle de la stabilité pour un système à un seul paramètre et dans le cas régulier ; on trouve des conditions de stabilité du genre de celles de Lagrange et la réciproque existe.

Le problème de la stabilité d'un paramètre secondaire est tout autre. Il est d'abord plus compliqué, parce qu'il y a plusieurs genres distincts d'équilibre, et ensuite beaucoup plus délicat à étudier à cause de l'accroissement périodique d'un tel paramètre. On est amené à chercher les conditions pour qu'une certaine intégrale définie dépendant de constantes arbitraires soit nulle quelles que soient ces constantes au voisinage d'un système initial de valeurs. C'est une équation fonctionnelle, sous forme intégrale, qu'il s'agit de résoudre ; l'étude d'un cas particulier permet de la transformer en une équation fonctionnelle sous forme finie dont on trouve assez facilement la solution générale.

On arrive de cette façon à des conditions nécessaires de stabilité et l'on constate aisément qu'elles sont suffisantes, ce qui donne le résultat suivant :

Les systèmes dans le cas régulier se partagent en deux groupes.

Le premier groupe, très restreint, est composé des systèmes à deux paramètres a et b

$$2G = Aa'^2 + 2Ca'b' + Bb'^2 + 2B_1b' + C_1$$

pour lesquels les coefficients A, C, B, B_1, C_1, *qui sont des fonctions de a seulement, satisfont aux conditions :*

C_1 *est une constante ;*

B_1 *n'est pas une constante ;*

$B = \alpha B_1^2 + 2\beta B_1 + \gamma$ (α, β, γ *constantes*) ;

$\dfrac{\dfrac{dB_1}{da}}{\sqrt{AB - C^2}}$ *est une constante.*

Pour un tel système, tous les équilibres paramétriques sont stables et il en est de même des équilibres correspondants du système matériel.

Le second groupe est constitué par tous les autres systèmes dans le cas régulier. Pour ces systèmes, tous les équilibres paramétriques sont instables et il en est de même des équilibres correspondants du système matériel, sauf peut-être ceux qui correspondent à des indéterminations paramétriques.

Les systèmes à liaisons indépendantes du temps définis par des paramètres absolus appartiennent toujours à la seconde catégorie.

Équilibre du paramètre principal.

1. a étant le paramètre principal, $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ les paramètres secondaires, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ les constantes introduites par les $n-1$ intégrales immédiates, on a l'équation principale

$$f(a)\,a'^2 = \varphi(a, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) + h = \Phi(a, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, h)$$

et nous savons, en nous limitant au cas élémentaire des fonctions

n'ayant que des racines d'ordre entier, que la condition pour que a soit en équilibre sur la valeur a_0 est que a_0 soit racine multiple de Φ pour des valeurs convenables $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0, h^0$ des constantes.

Si, considérant a comme une abscisse, nous construisons la courbe

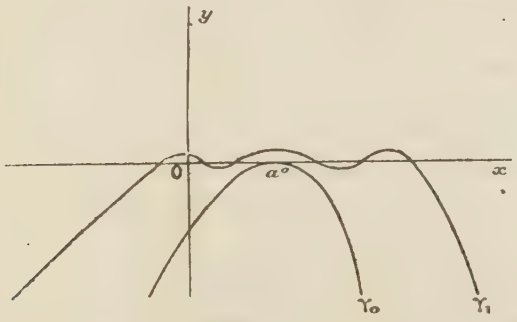
$$(\gamma_0) \qquad y = \Phi(a, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0, h^0),$$

elle sera tangente à l'axe des a au point a^0 et pourra présenter, en ce point, un maximum, un minimum ou une inflexion.

2. Supposons que la courbe (γ_0) présente un maximum. Considérons des conditions initiales infiniment voisines de celles qui donnent l'équilibre de a, c'est-à-dire des constantes $\alpha_1^1, \ldots, \alpha_{n-1}^1, h^1$ infiniment voisines de $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0, h^0$. Elles donneront une courbe

$$(\gamma_1) \qquad y = \Phi(a, \alpha_1^1, \ldots, \alpha_{n-1}^1, h^1)$$

infiniment voisine de (γ_0) et, pour la valeur a^1 infiniment voisine de a^0, la fonction Φ sera positive. La fonction $\Phi(a, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0, h_0)$ admettait la racine multiple a^0 d'ordre pair, donc $\Phi(a, \alpha_1^1, \ldots, \alpha_{n-1}^1, h^1)$ admettra un nombre pair de racines infiniment voisines de a^0 et parmi lesquelles il y en aura un nombre pair qui seront réelles. Au voisinage de a^0 la courbe (γ_1) aura donc la forme ci-dessous, mettant en évidence



des *arcs situés au-dessus de* Oa *et chacun de ces arcs étant limité par deux racines tendant vers* a^0 ; la courbe (γ_1) pourrait avoir d'autres arcs au-dessus de Oa, mais ceux-ci seraient, par rapport à a^0, au delà de

certaines racines ne tendant pas vers a^0. Le mouvement considéré, partant d'une valeur a' infiniment voisine de a^0, ne peut donc donner qu'une variation de a sur la corde d'un des arcs supérieurs considérés, c'est-à-dire entre deux valeurs tendant vers a^0. Cela suffit pour montrer que l'équilibre de a est alors *stable*.

3. Dans le cas du minimum ou de l'inflexion, nous allons montrer que l'équilibre de a est *instable*. Il n'est plus nécessaire ici de considérer *tous* les mouvements fournis par des conditions initiales infiniment voisines de celles donnant l'équilibre, il suffit de montrer l'existence d'*un seul* de ces mouvements donnant à a une variation dans un intervalle ne tendant pas vers zéro.

Considérons un mouvement obtenu en conservant les valeurs $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0$ qui correspondent à l'équilibre et en changeant seulement la valeur de h. La courbe (γ_1) ne sera que la courbe (γ_0) ayant subi la translation $h' - h^0$ parallèle à Oy et l'on aura, suivant les cas, 0, 2 ou 1 racines réelles tendant vers a^0; mais les arcs au-dessus de Oa ne seront jamais limités que d'un côté au plus par une telle racine; aucun arc supérieur ne correspondra à un intervalle tendant vers zéro. L'équilibre est donc bien instable.

4. Nous remarquons que si l'on a

$$\Psi(a) = \psi(a)\Phi(a),$$

$\psi(a)$ étant essentiellement positive, les conditions

$$\Phi(a^0) = 0, \quad \Phi'(a^0) = 0$$

entraînent

$$\Psi(a^0) = 0, \quad \Psi'(a^0) = 0,$$
$$\Psi''(a^0)\Phi''(a^0) > 0,$$

de sorte que, en résumé : *l'équation principale étant mise d'une façon quelconque sous la forme*

$$f(a)a'^2 = \Psi(a, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, h),$$

$f(a)$ étant essentiellement positive, un équilibre de a fourni par les condi-

tions initiales $a^0, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0, h^0$, *telles que* a^0 *soit racine multiple de*

$$\Psi(a, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0, h_0)$$

sera stable si cette fonction Ψ *est maxima pour* a^0 *et instable s'il n'en est pas ainsi.*

Pour qu'il y ait équilibre de a en a^0, il faut et il suffit que, a'^0 étant supposée nulle, a^0 satisfasse à la condition

$$\varphi'(a^0, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0) = 0;$$

a^0 étant donné, on a ainsi une relation entre les $n-1$ constantes $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0$, c'est-à-dire, en définitive, entre les $n-1$ valeurs initiales des b'. S'il n'y a qu'un seul paramètre secondaire, il y a donc un et un seul mouvement du système dans lequel a est en équilibre sur a^0; mais s'il y a plus d'un paramètre secondaire, il y a une infinité de mouvements du système dans lesquels a est en équilibre sur a^0 et l'équilibre de a pourra être stable pour les uns et instable pour les autres. Cela tient à ce que, dans ce cas, il correspond à la valeur d'équilibre a^0 une infinité de fonctions Φ dépendant de $n-2$ paramètres arbitraires, qui admettent toutes a^0 pour racine au moins double, mais pour lesquelles $\Phi''(a^0)$ peut avoir un signe variable avec ces constantes.

Équilibre d'un paramètre secondaire.

5. Commençons par établir les conditions d'équilibre d'un quelconque, b, des paramètres secondaires. L'intégrale première immédiate relative à b donne

$$b' = \lambda(a)a' + \mu(a, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$$

et il y aura équilibre si b' est constamment nulle. Le mouvement pour lequel ce fait se produit correspond à des constantes $a^0, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0, h^0$ et peut fournir soit l'équilibre de a, soit un mouvement effectif de a.

Dans le premier cas, l'équation principale étant prise sous la forme

$$a'^2 = F(a, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, h),$$

c'est que a^0 est racine double de

$$F(a, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0, h^0);$$

et, comme on a alors

$$b' = \mu(a^0, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0),$$

on voit que a^0 doit être racine de la fonction

$$\mu_0(a) = \mu(a, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0).$$

Cette condition est d'ailleurs forcément réalisée si les conditions initiales comprennent la condition

$$b'^0 = 0,$$

car le paramètre principal étant en équilibre, tous les paramètres secondaires ont des mouvements uniformes et le paramètre b, en particulier, ayant une vitesse initiale nulle, est forcément en équilibre.

Dans la seconde hypothèse, a est essentiellement variable. Supposons d'abord que, pour le paramètre b considéré, la fonction $\lambda(a)$ soit identiquement nulle. On devra avoir, pendant tout le mouvement,

$$\mu(a, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0) = 0$$

et comme a est variable, cela exige que la fonction précédente, c'est-à-dire $\mu_0(a)$, soit identiquement nulle.

Supposons enfin que, a étant variable, la fonction $\lambda(a)$ ne soit pas nulle ; on devra avoir pendant tout le mouvement

$$\lambda(a)a' + \mu_0(a) = 0,$$

mais on a, pour ce mouvement,

$$a'^2 = F(a, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0, h^0) = F_0(a);$$

donc on devra avoir, en éliminant a',

$$\lambda^2(a)F_0(a) - \mu_0^2(a) = 0$$

et, a étant variable, cette égalité devra être une identité.

L'équation principale du mouvement considéré se décompose alors en deux :

$$a' - \frac{\mu_0(a)}{\lambda(a)} = 0,$$

$$a' + \frac{\mu_0(a)}{\lambda(a)} = 0,$$

et le mouvement de a aura lieu en suivant celle des deux qui sera vérifiée à l'instant initial. Comme, par hypothèse, la valeur initiale de b' est nulle, c'est la seconde qui vérifie cette condition et il en résulte que b' sera nulle pendant tout le mouvement; il y aura donc bien équilibre de b. Le raisonnement serait en défaut si les deux équations étaient toutes deux vérifiées au début, c'est-à-dire si l'on avait simultanément

$$a'^0 = 0, \qquad \mu_0(a^0) = 0,$$

mais alors a^0 serait racine double de F_0, donc a serait en équilibre sur a^0, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

Le raisonnement serait encore en défaut si l'on avait

$$\lambda(a^0) = 0.$$

Comme a'^0 a une valeur finie et non nulle, $\mu_0(a)$ devrait admettre a^0 comme racine du même ordre, de façon que le rapport

$$\frac{\mu_0(a)}{\lambda(a)}$$

eût une valeur finie et non nulle pour a^0, et de ce que la quantité

$$\lambda(a)a' + \mu_0(a) = \lambda(a)\left[a' + \frac{\mu_0(a)}{\lambda(a)}\right]$$

est nulle à l'instant initial, on ne peut conclure que le second facteur est nul à ce moment, puisque le premier facteur l'est déjà. On est assuré que l'une des deux quantités

$$a'^0 + \frac{\mu_0(a_0)}{\lambda(a^0)}, \qquad a'^0 - \frac{\mu_0(a^0)}{\lambda(a^0)}$$

est nulle, mais on ne sait pas laquelle, cela dépend de la comparaison

des signes des deux quantités

$$a'^0, \qquad \frac{\mu_0(a^0)}{\lambda(a^0)}.$$

Si elles sont de même signe, c'est la première des deux équations différentielles qui est vérifiée et b' n'est pas nulle; donc il n'y a pas équilibre de b; si elles sont de signes contraires, c'est la seconde équation différentielle qui est vérifiée et il y a équilibre de b.

En résumé, *il y a équilibre du paramètre b dans les cas suivants :*

1° a^0 *est racine double de* F_0 *et racine de* μ_0 (équilibre simultané du paramètre b et du paramètre principal);

2° *On a*

$$\lambda(a^0) \not\equiv 0, \qquad \lambda^2(a)F_0(a) - \mu_0^2(a) \equiv 0;$$

3° *La fonction* $\lambda(a)$ *est nulle pour* a^0, *mais n'est pas identiquement nulle; on a l'identité*

$$\lambda^2(a)F_0(a) - \mu_0^2(a) \equiv 0$$

et la quantité

$$\frac{\mu_0(a^0)}{\lambda(a^0)}$$

est de signe contraire à a'^0;

4° *La fonction* $\lambda(a)$ *est identiquement nulle, ainsi que la fonction* $\mu_0(a)$.

6. L'étude de la stabilité de l'équilibre d'un paramètre secondaire est un problème d'une nature tout à fait différente de celle de l'équilibre du paramètre principal. Nous avions alors à étudier un intervalle limité par deux racines d'une équation, c'était relativement simple. Au contraire, un paramètre secondaire n'a pas de variation périodique; que le mouvement du paramètre principal soit révolutif périodique ou oscillatoire périodique, le paramètre secondaire a toujours un accroissement périodique.

Si, pour des conditions initiales infiniment voisines de celles qui fournissent l'équilibre du paramètre considéré, l'accroissement périodique de ce paramètre n'est pas identiquement nul, il finira, au bout d'un nombre suffisamment grand de périodes, par s'éloigner autant

qu'on voudra de sa position initiale, de sorte que l'équilibre sera instable.

Une condition nécessaire de la stabilité est donc que, *pour des conditions initiales arbitraires mais infiniment voisines de celles fournissant l'équilibre du paramètre secondaire, l'accroissement périodique de ce paramètre soit toujours nul.* On est ainsi amené à l'étude d'une intégrale définie dépendant de paramètres et, pour ne pas interrompre trop longuement la suite des idées, nous commencerons par établir quelques propriétés analytiques.

7. Considérons l'intégrale définie

$$I = \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{\Phi(z)\,dz}{\sqrt{\lambda^2 - z^2}}$$

et cherchons à quelles conditions elle est nulle quelle que soit la valeur de λ. On suppose $\Phi(z)$ régulière pour $z = 0$

$$\Phi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

développement valable pour

$$|z| < \rho$$

et nous allons étudier l'intégrale en supposant

$$\lambda < \rho.$$

On pourra alors écrire

$$I = a_0 J_0 + a_1 J_1 + a_2 J_2 + \dots$$

avec

$$J_n = \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{z^n\,dz}{\sqrt{\lambda^2 - z^2}} = \lambda^n \int_{-1}^{+1} \frac{u^n\,du}{\sqrt{1 - u^2}} = \lambda^n k_n.$$

On a ainsi le développement de I suivant les puissances entières et positives de λ, développement valable de $-\rho$ à $+\rho$. On voit immédiatement que toutes les intégrales k_n pour n impair sont nulles, tandis que celles qui correspondent à n pair sont des nombres dont aucun n'est nul. Le développement

$$I = a_0 k_0 + a_2 k_2 \lambda^2 + a_4 k_4 \lambda^4 + \dots$$

doit être nul quel que soit λ ; donc

$$a_0 k_0 = a_2 k_2 = a_4 k_4 = \ldots = 0,$$

ce qui, d'après la remarque faite sur k_0, k_2, ..., se réduit à

$$a_0 = a_2 = a_4 = \ldots = 0$$

et exprime que $\Phi(z)$ est une fonction impaire, c'est-à-dire satisfait à l'identité

$$\Phi(-z) = -\Phi(z).$$

Supposons qu'il en soit ainsi, la fonction $\Phi(z)$ s'annule et change de signe pour $z = 0$. Si λ est suffisamment petit pour qu'il n'y ait pas d'autre racine entre $-\lambda$ et $+\lambda$, l'intégrale I se compose de deux parties

$$\int_{-\lambda}^{0} \frac{\Phi(z)\,dz}{\sqrt{\lambda^2 - z^2}}, \qquad \int_{0}^{+\lambda} \frac{\Phi(z)\,dz}{\sqrt{\lambda^2 - z^2}}$$

égales et de signes contraires et non nulles. Développons la seconde au moyen du développement de Φ. Nous aurons

$$a_1 \int_0^{\lambda} \frac{z\,dz}{\sqrt{\lambda^2 - z^2}} + a_3 \int_0^{\lambda} \frac{z^3\,dz}{\sqrt{\lambda^2 - z^2}} + \ldots,$$

ce qui peut s'écrire

$$\lambda a_1 \int_0^1 \frac{u\,du}{\sqrt{1 - u^2}} + \lambda^3 a_3 \int_0^1 \frac{u^3\,du}{\sqrt{1 - u^2}} + \ldots$$

et montre que l'intégrale tend vers zéro avec λ.

En résumé : *Pour que l'intégrale* I *soit nulle quelle que soit* λ, *il faut et il suffit que la fonction* Φ *soit impaire. L'intégrale* I *se compose alors de deux parties égales et de signes contraires qui tendent vers zéro avec* λ.

8. Considérons l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\Phi(z)(z - \alpha)\,dz}{\sqrt{\lambda^2 z^2(z) - (z - \alpha)^2}}$$

qui dépend de deux constantes, λ, α. On suppose $\Phi(z)$ et $\varphi(z)$ régulières pour $z = 0$. Pour λ nulle, la fonction

$$\lambda^2\varphi^2(z) - (z-\alpha)^2$$

admet la racine double α; pour λ non nulle, mais suffisamment petite, elle admet deux racines situées de part et d'autre de α et très voisines de α; ce sont ces deux racines z_1 et z_2 que nous prenons pour limites de l'intégrale I.

$\varphi(z)$ n'admet que des racines fixes. Nous prendrons α situé entre zéro et une racine consécutive à zéro, c'est-à-dire de façon que α ne soit pas racine de $\varphi(z)$ et que cette fonction n'ait pas de racine entre zéro et α. La fonction

$$\Psi(z) = \varphi(z) - (z-\alpha)\varphi'(z)$$

n'admet pas α comme racine. En prenant λ suffisamment petite l'intervalle $z_1 z_2$ sera aussi resserré que l'on voudra de part et d'autre de α et sera tel que $\varphi(z)$ et $\Psi(z)$ n'y aient aucune racine.

La fonction

$$\frac{z-\alpha}{\varphi(z)}$$

sera donc finie dans tout l'intervalle d'intégration et y variera toujours dans le même sens, de sorte que nous pourrons faire le changement de variable d'intégration

$$\frac{z-\alpha}{\varphi(z)} = u$$

donnant

$$z = \theta(u, \alpha)$$

et

$$I = \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{\Phi[\theta(u,\alpha)]\,\frac{\partial\theta}{\partial u}\,u\,du}{\sqrt{\lambda^2 - u^2}}.$$

Nous sommes ramenés à une intégrale de la forme étudiée dans le paragraphe précédent. Elle doit être nulle quelles que soient les deux constantes λ et α; laissant α fixe; on voit que le numérateur de l'élément doit être une fonction impaire de u, donc, à cause du facteur u,

que

$$\Phi[\theta(u, \alpha)]\frac{\partial\theta}{\partial u}$$

doit être une fonction paire et, cela, quelle que soit la valeur de α. On doit donc avoir, quelles que soient les valeurs de u et de α,

$$\Phi[\theta(-u, \alpha)]\frac{\partial\theta}{\partial u}(-u, \alpha) = \Phi[\theta(u, \alpha)]\frac{\partial\theta}{\partial u}(u, \alpha).$$

Pour faciliter le raisonnement, introduisons la fonction primitive Ψ de la fonction Φ. L'égalité précédente peut s'écrire

$$-\frac{\partial}{\partial u}\Psi[\theta(-u, \alpha)] = \frac{\partial}{\partial u}\Psi[\theta(u, \alpha)],$$

ou, en intégrant,

$$\Psi[\theta(u, \alpha)] + \Psi[\theta(-u, \alpha)] = \text{const.}$$

La constante est d'ailleurs facile à déterminer, car, pour $u = 0$, l'équation de transformation donne $z = \alpha$, de sorte qu'on a

$$\theta(0, \alpha) = \alpha$$

et, en faisant $u = 0$ dans l'identité, on obtient pour la constante la valeur

$$2\Psi(\alpha);$$

la fonction Ψ doit donc vérifier une équation fonctionnelle à deux variables indépendantes u et α. Posons

$$x = \theta(u, \alpha), \qquad y = \theta(-u, \alpha);$$

x et y seront les racines de

$$x - \alpha = \quad u\varphi(x),$$
$$y - \alpha = -u\varphi(y),$$

ce qui permet d'exprimer α et u au moyen de x, y. En particulier, on en tire la valeur de α et finalement l'équation fonctionnelle prend la forme

$$\Psi(x) + \Psi(y) = 2\Psi(\alpha),$$

α devenant ici une abréviation pour représenter la quantité

$$\frac{y\varphi(x)+x\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}.$$

On déduit immédiatement de là que l'on doit avoir

$$\frac{\partial^2\Psi(\alpha)}{\partial x\,\partial y}=0$$

ou, en développant,

$$\Psi'(\alpha)\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y}+\Psi''(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y}=0,$$

ou encore

$$\Phi(\alpha)\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y}+\Phi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y}=0.$$

Cette identité doit avoir lieu en particulier si l'on fait

$$y=x.$$

On a alors, par un calcul facile,

$$\alpha=x,\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial x}=\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\frac{1}{2},\qquad \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

d'où l'équation

$$2\Phi(x)\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}+\Phi'(x)=0,$$

qui, par intégration immédiate, donne

$$\Phi(z)=\frac{k}{\varphi^2(z)}.$$

Adoptons donc cette expression de Φ et repartons de l'équation fonctionnelle en Ψ en la dérivant par rapport à x et par rapport à y. Nous aurons les deux nouvelles équations fonctionnelles

$$\Psi'(x)=2\Psi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x},$$

$$\Psi'(y)=2\Psi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial y},$$

qui, par intégration, redonnent l'équation fondamentale en tenant compte de ce que, pour $y = x$, α se réduit à x.

Des deux équations précédentes qui s'écrivent

$$\frac{1}{\varphi^2(x)} = \frac{2}{\varphi^2(\alpha)} \frac{\partial \alpha}{\partial x},$$

$$\frac{1}{\varphi^2(y)} = \frac{2}{\varphi^2(\alpha)} \frac{\partial \alpha}{\partial y},$$

on tire

$$\varphi^2(x) \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \varphi^2(y) \frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

qui, développée et réduite après suppression du facteur non nul

$$\frac{\varphi(x)\varphi(y)}{[\varphi(x) + \varphi(y)]^2},$$

devient

$$\varphi(x)[(y-x)\varphi'(x) + \varphi(x)] = \varphi(y)[(x-y)\varphi'(y) + \varphi(y)].$$

Si l'on pose

$$\varphi^2(z) = \omega(z),$$

elle devient

$$(y-x)\omega'(x) + 2\omega(x) = (x-y)\omega'(y) + 2\omega(y).$$

Si l'on considère y comme une constante, on a ainsi une équation linéaire de premier ordre déterminant $\omega(x)$ et admettant une intégrale générale qui est un certain polynome du second degré. On doit donc avoir

$$\varphi^2(z) = \omega(z) = Az^2 + Bz + C.$$

et réciproquement si l'on prend une telle fonction φ on vérifie par un calcul sans intérêt que les deux identités dérivées sont bien vérifiées.

Le résultat auquel nous arrivons ainsi peut se présenter sous la forme simple suivante qui constitue, en définitive, un simple changement de notation :

Pour que l'intégrale

$$I = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\Phi(z)(z-\alpha)\,dz}{\varphi(z)\sqrt{\lambda^2\varphi(z) - (z-\alpha)^2}}$$

soit nulle quelles que soient les deux constantes λ *et* α, *il faut et il suffit que* Φ *soit une constante et que* φ *soit un polynome entier au plus du second degré*, et nous remarquerons encore, puisque I se réduit à l'intégrale du paragraphe précédent, que cette intégrale se compose de deux parties de signes contraires et dont la grandeur commune tend vers zéro avec λ et α.

9. Considérons enfin l'intégrale

$$I = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\Phi(z)[\psi(z) - \alpha - \Sigma\beta\omega(z)]\,dz}{\varphi(z)\sqrt{\lambda^2\varphi(z) - [\psi(z) - \alpha - \Sigma\beta\omega(z)]^2}},$$

α et les β étant des constantes arbitraires très petites, $\psi(z)$ ne se réduisant pas à une constante et admettant la racine z_0 et z_1, z_2 étant les deux racines de la quantité sous le radical qui se réduisent à z_0 quand α, λ et les β sont nuls.

Considérons les β comme fixes et faisons le changement

$$\psi(z) - \Sigma\beta\omega(z) = u,$$

d'où

$$z = \theta(u).$$

On sera ramené au cas précédent

$$I = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\Phi[\theta(u)]\theta'(u)(u - \alpha)\,du}{\varphi[\theta(u)]\sqrt{\lambda^2\varphi[\theta(u)] - (u - \alpha)^2}},$$

l'intégrale devant être indépendante de α et λ, on aura donc

$$\varphi[\theta(u)] = A u^2 + B u + C, \qquad \Phi[\theta(u)]\theta'(u) = K.$$

Revenons à la variable z, en remarquant que

$$\theta'(u) = \frac{dz}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dz}} = \frac{1}{\psi' - \Sigma\beta\omega'}$$

on aura

$$\varphi(z) = A(\psi - \Sigma\beta\omega)^2 + B(\psi - \Sigma\beta\omega) + C,$$
$$\Phi(z) = K(\psi' - \Sigma\beta\omega'),$$

et ces identités devront avoir lieu quels que soient les β. Les coefficients A, B, C, K peuvent d'ailleurs dépendre des β.

Annulons tous les β. Nous aurons

$$\varphi(z) = A_0\psi^2 + B_0\psi + C_0,$$
$$\Phi(z) = K_0\psi',$$

et les fonctions ψ et ω devront satisfaire, quels que soient les β, à

$$A(\psi - \Sigma\beta\omega)^2 + B(\psi - \Sigma\beta\omega) + C = A_0\psi^2 + B_0\psi + C_0,$$
$$K(\psi' - \Sigma\beta\omega') = K_0\psi'.$$

La seconde montre que

$$\Sigma\beta\frac{\omega'}{\psi'}$$

est indépendante de z quels que soient les β, de sorte que les $\frac{\omega'}{\psi'}$ sont des constantes ou encore que chaque ω est une fonction linéaire de ψ.

La quantité

$$\sigma = \psi - \Sigma\beta\omega$$

est aussi une fonction linéaire de ψ se réduisant à ψ pour les β tous nuls,

$$\sigma = E\psi + F;$$

on aura donc

$$A_0\left(\frac{\sigma - F}{E}\right)^2 + B_0\frac{\sigma - F}{E} + C_0 = A\sigma^2 + B\sigma + C$$

ou

$$\frac{A_0}{E}\sigma^2 + \left(\frac{B_0}{E} - \frac{2A_0F}{E^2}\right)\sigma + \frac{A_0F^2}{E^2} - \frac{B_0F}{E} + C_0 = A\sigma^2 + B\sigma + C,$$

ce qui donne les expressions de ABC telles que la première identité soit vérifiée par ψ et les ω quels que soient les β.

En résumé, *pour que l'intégrale soit nulle quels que soient* α, λ *et les* β *supposés suffisamment petits, il faut et il suffit :*

1° *Que chaque* ω *soit une fonction linéaire de* ψ ;

2° *Que* φ *soit un polynome entier en* ψ *au plus du second degré;*

3° *Que* Φ *soit proportionnelle à* ψ'.

Et là encore, nous remarquerons, comme conséquence de la réduc-

tion possible à l'intégrale du paragraphe 7, que si λ, α et les β sont suffisamment petits, l'intégrale se compose d'une partie positive et d'une partie négative dont la grandeur commune tend vers zéro.

10. Ces préliminaires analytiques étant exposés, revenons à notre problème de Dynamique. La discussion dans le cas d'un nombre quelconque de paramètres secondaires conduit à des fonctions formées d'une façon assez compliquée au moyen des coefficients de la fonction génératrice. Nous commencerons par les former au moyen du calcul préliminaire suivant :

Soient b le paramètre secondaire dont nous nous occupons, et b_1, b_2, ..., b_{n-2} les autres. Nous avons les $n-2$ intégrales immédiates

$$\frac{\partial G}{\partial b'_1} = \beta_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial G}{\partial b'_{n-2}} = \beta_{n-2}$$

et, en ajoutant au besoin des constantes convenables aux coefficients de b'_1, b'_2, ..., b'_{n-2} dans la fonction génératrice, ce qui revient à modifier par équivalence cette fonction génératrice, on peut supposer que les conditions initiales du mouvement $\mathfrak{M}_0$ fournissant l'équilibre de b donnent pour les β des valeurs toutes nulles.

Au moyen de ces $n-2$ intégrales immédiates, formons le système réduit aux deux paramètres a et b en portant les valeurs de b'_1, ..., b'_{n-2} qu'on en tire dans

$$G - \sum_{i=1}^{n-2} b'_i \frac{\partial G}{\partial b'_i}.$$

Nous obtiendrons une nouvelle fonction génératrice où b figurera encore comme paramètre secondaire et qui sera

$$2G_{a,b} = A a'^2 + 2C a' b' + B b'^2 + 2B_1 b' + C_1$$

en n'écrivant pas le terme en a' qui est une dérivée exacte.

Les coefficients A, B, C seront des fonctions de a indépendantes des constantes arbitraires β; B_1 sera une fonction linéaire de ces constantes,

$$B_1 = \psi(a) + \Sigma \beta \omega(a).$$

Enfin, C_1 sera une forme quadratique non homogène des β,

$$C_1 = \zeta(a) + \Sigma\beta\xi(a) + \Sigma\beta_i\beta_j\eta_{ij}(a).$$

De plus, la forme

$$A a'^2 + 2Ca'b' + Bb'^2$$

sera essentiellement positive et à déterminant non nul, de sorte que B et

$$\Delta = AB - C^2$$

seront des fonctions essentiellement positives.

Cette fonction G_{ab} donnera a et b au moyen de son intégrale de forces vives

$$A a'^2 + 2Ca'b' + Bb'^2 + \ldots - C_1 = h$$

et de son intégrale immédiate

$$Ca' + Bb' + B_1 = \alpha.$$

On aura ainsi a et b et ensuite $b_1, \ldots, b_{n-2}$ au moyen des $n-2$ intégrales immédiates dont on est parti. La solution générale dépend donc des constantes h, α, $\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$. Les conditions initiales du mouvement $\mathfrak{M}_0$ donnent déjà pour les β des valeurs nulles; en ajoutant une constante convenable à C_1 ainsi qu'à B_1, ce qui ne fait que modifier $G_{a,b}$ par équivalence, on pourra supposer qu'elles donnent aussi pour h et α des valeurs nulles.

Au moyen de $G_{a,b}$, les deux paramètres a et b sont déterminés par

$$a'^2 = F(a) = \frac{1}{\Delta}[(h + C_1)B - (B_1 - \alpha)^2], \qquad b' = \lambda(a)a' + \mu(a).$$

$$\lambda(a) = -\frac{C}{B}, \qquad \mu(a) = \frac{\alpha - B_1}{B} = \frac{\alpha - \psi - \Sigma\beta\omega}{B},$$

et nous allons, par ces formules, examiner successivement les différents cas d'équilibre de b.

11. Supposons qu'il y ait équilibre de b dans un mouvement $\mathfrak{M}_0$ et que, dans ce mouvement, le paramètre principal a ait un mouvement révolutif. En changeant au besoin de paramètre principal, on peut

toujours supposer que l'on est dans le cas de la révolution périodique d'un angle et b a un accroissement périodique

$$\mathfrak{W} = \int_0^{2\pi} \left(\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{F}} \right) da$$

en supposant, pour fixer les idées, que la révolution de a se fasse dans le sens de a croissant.

Si $\lambda(a) = 0$, c'est-à-dire si la fonction C est nulle, la condition d'équilibre est

$$\mu_0(\alpha) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\psi(a) \equiv 0.$$

Prenons alors un mouvement $\mathfrak{M}$ fourni par des conditions initiales

$$\begin{cases} h = \beta_1 = \ldots = \beta_{n-1} = 0, \\ \alpha \text{ infiniment petit}, \end{cases}$$

infiniment voisines de celles qui donnent $\mathfrak{M}_0$. Pour ce mouvement, on aura encore variation révolutive de a et

$$\mu = \frac{\alpha}{B};$$

donc

$$\mathfrak{W} = \int_0^{2\pi} \frac{\alpha}{B\sqrt{F}} da,$$

et cette intégrale n'est pas nulle, ayant tous ses éléments de même signe. Le fait que cet accroissement périodique de b n'est pas nul pour des conditions initiales infiniment voisines de celles donnant l'équilibre de ce paramètre suffit pour prouver que cet équilibre est instable.

Si $\lambda(a)$, c'est-à-dire C, n'est pas identiquement nulle, la condition d'équilibre est

$$\lambda^2(a) F_0 - \mu_0^2(a) = 0,$$

devant donner b' identiquement nulle; donc

$$\lambda(a) = -\frac{\mu_0(a)}{\sqrt{F_0}}.$$

Il en résulte

$$\mathfrak{B} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\mu}{\sqrt{F}} - \frac{\beta_0}{\sqrt{F_0}} \right) da.$$

Considérons encore le mouvement $\mathfrak{M}$ défini par les conditions initiales employées dans le cas précédent. Le fait que $\mathfrak{B}$ serait nul exprimerait que l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mu}{\sqrt{F}} da = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\Delta}}{B} \frac{\alpha - \psi}{\sqrt{\zeta - (\alpha - \psi)^2}} da$$

resterait égale à sa valeur pour $\alpha = 0$, donc serait indépendante de α. Si on la dérive par rapport à α, on trouve

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\Delta}}{B} \frac{\zeta}{[\zeta - (\alpha - \psi)^2]^{\frac{3}{2}}} da,$$

intégrale non nulle, car tous ses éléments sont positifs; donc $\mathfrak{B}$ n'est pas nul quelle que soit la valeur de α, et l'on pourra trouver α aussi petit qu'on voudra et donnant un accroissement périodique non nul, ce qui démontre encore l'instabilité de l'équilibre.

12. Supposons que, dans le mouvement $\mathfrak{M}_0$, le paramètre a ait une variation oscillatoire périodique. Ce fait ne peut pas se produire avec la fonction $\lambda(a)$ non nulle, car l'équation d'équilibre

$$F_0 = \left(\frac{\mu_0}{\lambda} \right)^2$$

montre que F_0 ne peut avoir que des racines d'ordre pair, donc ne fournit jamais de valeur d'arrêt.

On est donc dans le cas de $\lambda(a)$ identiquement nulle et l'équilibre exige qu'il en soit de même de μ_0, c'est-à-dire de ψ. Reprenons encore le mouvement $\mathfrak{M}$ toujours défini par les mêmes conditions initiales que précédemment, il donnera encore une variation oscillatoire de a, et, pour b, un accroissement périodique

$$\mathfrak{B} = 2 \int_{a_1}^{a_2} \frac{\mu}{\sqrt{F}} da = 2 \int_{a_1}^{a_2} \frac{\alpha}{B\sqrt{F}} da.$$

qui n'est pas nul, comme ayant tous ses éléments de même signe. Il y a donc encore instabilité de l'équilibre.

13. Supposons que, dans le mouvement $\mathfrak{M}_0$, le paramètre a ait une variation asymptotique.

Admettons d'abord que $\lambda(a)$ soit nulle, ce qui entraîne ψ nulle à cause de l'équilibre. Pour un mouvement quelconque donné par des conditions initiales donnant

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{n-2} = 0,$$

on aura soit une variation révolutive périodique de a, donc un accroissement périodique

$$\int_0^{2\pi} \frac{\alpha}{\sqrt{F}}\, da,$$

puisque λ est nulle, ou une variation oscillatoire donnant un accroissement périodique

$$2\int_{a_1}^{a_2} \frac{\mu}{\sqrt{F}}\, da,$$

mais, comme μ se réduit ici à $\frac{\alpha}{B}$, on a dans les deux cas une intégrale à éléments tous de même signe, donc un accroissement périodique non nul indiquant l'instabilité de l'équilibre.

Si $\lambda(a)$ n'est pas nulle, nous emploierons un mode de raisonnement qui nous servira également dans le cas suivant.

Par hypothèse, on a

$$F_0 = \frac{\mu_0^2}{\lambda^2},$$

et a tend asymptotiquement vers une racine a_1 de $\frac{\mu_0}{\lambda}$ telle qu'il n'existe pas d'autre racine de $\frac{\mu_0}{\lambda}$ entre a_1 et a_0.

Partons des mêmes conditions initiales que précédemment. La fonction

$$F = \frac{1}{\Delta}\left[(h+\zeta)B - (\alpha - \psi)^2\right]$$

admet une racine double pour

$$\alpha = h = 0.$$

Si nous cherchons à exprimer qu'elle a une racine double, nous trouverons une relation

$$R(\alpha, h) = 0$$

vérifiée quand α et h seront nuls. Si nous prenons des conditions initiales α, h infiniment petites et satisfaisant à cette équation, nous aurons encore une racine double α_2 infiniment voisine de α_1, donc encore mouvement asymptotique. Si cette racine double α_2 n'annule pas $\alpha - \psi$, elle donne pour b un mouvement asymptotique vers l'infini, de sorte que l'équilibre est instable.

Si cette racine α_2 était racine de $\psi - \alpha$, elle serait, par ce fait même, essentiellement variable avec α et racine double de

$$(h + \zeta)B;$$

elle ne pourrait être racine de B qui ne dépend pas de α, donc devrait être racine double de $h + \zeta$ et, par conséquent, racine de sa dérivée ζ', ce qui est absurde puisque ζ' ne dépend pas de α. Le raisonnement ne s'appliquerait plus si ζ' était identiquement nulle; ζ serait alors une constante et la constante $h + \zeta$ devrait être nulle, quelles que fussent α et h satisfaisant à la condition R, et en particulier pour α et h nuls, donc ζ serait nulle. La condition d'équilibre de b serait alors

$$-\frac{\psi^2}{\Delta} = \frac{\psi^2}{C^2}$$

ou

$$AB\psi^2 = 0;$$

comme A et B ne peuvent, ni l'un ni l'autre, être identiquement nuls, il en résulterait

$$\psi = 0.$$

On aurait alors

$$F = \frac{1}{\Delta}(hB - \alpha^2)$$

et déterminant h et α aussi petits qu'on voudra, mais avec un rapport $\frac{\alpha^2}{h}$

tel que l'équation

$$B - \frac{\alpha^2}{h} = 0$$

ait des racines, on aura un mouvement oscillatoire de a fournissant pour b un accroissement périodique qui ne serait certainement pas nul par suite de ce que ψ n'existe pas; c'est le raisonnement déjà employé au paragraphe précédent, l'équilibre est donc encore instable.

14. Abordons maintenant le dernier cas, celui où, dans le mouvement $\mathfrak{M}_0$, le paramètre a est en équilibre. a_0 est alors racine double de F_0 et racine de μ_0.

Si nous reprenons le calcul du paragraphe précédent, des valeurs infiniment petites de α et h satisfaisant à

$$B(\alpha, h) = 0$$

fourniront pour F une racine double a_1 infiniment voisine de a_0 et que l'on pourra prendre comme valeur initiale de a. Dans ce mouvement, a sera en équilibre sur a_1 et b aura un mouvement uniforme dont la vitesse sera

$$\mu(a_1) = \frac{\alpha - \psi(a_1)}{B(a_1)}.$$

En général, on n'aura pas

$$\alpha - \psi(a_1) = 0,$$

donc b aura un mouvement uniforme de vitesse non nulle et s'éloignera indéfiniment de sa valeur initiale. L'équilibre sera instable.

Supposons que a_1 soit racine de $\alpha - \psi$. Nous en tirerons les mêmes conséquences que dans le paragraphe précédent, en ce sens que l'on devra avoir encore

$$\zeta = 0;$$

mais la condition d'équilibre n'étant plus la même, on ne peut en conclure que ψ est identiquement nulle; tout ce que l'on sait, c'est que ψ admet la racine a_0.

Mais reprenons le même raisonnement en donnant aux β non plus

les valeurs nulles qui correspondent à l'équilibre, mais des valeurs très petites quelconques. Laissant fixes ces β une fois choisis et laissant h et α variables liés par la relation

$$R(h, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = 0,$$

nous en conclurons encore que l'équilibre est instable tant que la fonction C_1 ne sera pas une constante. Le seul cas d'exception, ou plus exactement de doute, sera donc celui où C_1 est une constante, quelles que soient les constantes β, ce qui exige que la fonction $\zeta(a)$, les fonctions $\xi(a)$ et les fonctions $\gamma_i(a)$ soient toutes des constantes.

On a alors

$$F = \frac{1}{\Delta}[\lambda^2 B - (\alpha - \psi - \Sigma\beta\omega)^2],$$

λ^2 étant une constante qui, pour des conditions initiales réelles, est certainement positive, car B étant essentiellement positive, s'il n'en était pas ainsi, la fonction F serait négative pour toute valeur de a.

Pour h, α et les β nuls, la fonction F admet la racine double a_0, qui est racine de ψ; pour h, α et les β infiniment petits, elle admettra deux racines a_1, a_2 infiniment voisines de a_0 et F sera positive entre a_1, a_2 et négative au dehors; a aura donc mouvement oscillatoire entre a_1 et a_2 et b aura un accroissement périodique

$$\mathfrak{W} = 2\int_{a_1}^{a_2} \frac{\dfrac{\alpha - \psi - \Sigma\beta\omega}{B}}{\sqrt{\dfrac{1}{\Delta}[\lambda^2 B - (\alpha - \psi - \Sigma\beta\omega)^2]}}\, da.$$

C'est précisément l'intégrale étudiée au paragraphe 9 avec

$$\varphi = B,$$
$$\Phi = \sqrt{\Delta}.$$

Une *condition nécessaire de la stabilité* est que l'on ait

$$\mathfrak{W} = 0,$$

quelles que soient les h, α et les β; donc, d'après l'étude faite, que :

1° *Chaque ω soit une fonction linéaire de ψ;*

2° B *soit un polynome entier, du second degré au plus, de* ψ;

3° *Le rapport*

$$\frac{\psi'}{\sqrt{\Delta}}$$

soit une constante.

Cette condition est d'ailleurs suffisante. $\mathfrak{W}$ étant nulle, le mouvement de b est périodique et l'on a

$$b = \int \left(\lambda(a) \pm \frac{\mu(a)}{\sqrt{F(a)}} \right) da$$
$$= \int \lambda(a)\, da \pm \int \frac{\mu(a)}{\sqrt{F(a)}}\, da.$$

Soit M le module maxima de $\lambda(a)$ dans un intervalle fini contenant a_0 et à l'intérieur duquel nous pourrons supposer compris a_1 et a_2 pour les constantes h, α et β suffisamment petites. D'autre part, nous savons que, pour ces constantes infiniment petites, l'intervalle a_1, a_2 se partage en deux morceaux a_1, a_3, a_3, a_2 tels que, dans le premier, μ soit toujours positif et que, dans le second, il soit toujours négatif et que les intégrales

$$\int \frac{\mu}{\sqrt{F}}\, da$$

étendues à ces deux morceaux aient une valeur absolue M′ tendant vers zéro avec h, α et les β.

Pour avoir la grandeur de l'oscillation de b, il nous suffit d'étudier la variation de b quand a effectue une oscillation complète. Partons de a_1 dans le mouvement croissant de a, on aura

$$b = b_1 + \int_{a_1}^{a} \lambda\, da + \int_{a_1}^{a} \frac{\mu}{\sqrt{F}}\, da.$$

La première intégrale est, en valeur absolue, moindre que

$$M(a_2 - a_1);$$

quant à la seconde, elle croît de o à M′ quand a va de a_1 à a_2, puis, de a_2 à a_1, décroît de M′ à o; elle est positive et inférieure à M′. Dans

cette demi-oscillation de a, les valeurs prises par b sont donc comprises entre

$$b_1 - \mathrm{M}(a_2 - a_1)$$

et

$$b_1 + \mathrm{M}(a_2 - a_1) + \mathrm{M}',$$

et, en particulier, il en est ainsi de la valeur b_2 obtenue au bout de cette demi-oscillation. A partir de ce moment, on a

$$\begin{aligned} b &= b_2 + \int_{a_2}^{a} \lambda\, da - \int_{a_2}^{a} \frac{\mu}{\sqrt{\mathrm{F}}}\, da \\ &= b_2 - \int_{a}^{a_2} \lambda\, da + \int_{a}^{a_2} \frac{\mu}{\sqrt{\mathrm{F}}}\, da, \end{aligned}$$

de sorte que, pendant cette seconde demi-oscillation de a, le paramètre b reste compris entre

$$b_2 - \mathrm{M}(a_2 - a_1)$$

et

$$b_2 + \mathrm{M}(a_2 - a_1) + \mathrm{M}'.$$

Si, dans la limite inférieure ainsi trouvée, nous remplaçons b_2 par sa limite inférieure

$$b_1 - \mathrm{M}(a_2 - a_1),$$

et si, dans la limite supérieure, nous remplaçons b_2 par sa limite supérieure

$$b_1 + \mathrm{M}(a_2 - a_1) + \mathrm{M}',$$

nous obtiendrons un intervalle

$$b_1 - 2\mathrm{M}(a_2 - a_1), \qquad b_1 + 2\mathrm{M}(a_2 - a_1) + 2\mathrm{M}',$$

dans lequel sera compris b dans la seconde demi-oscillation, et qui contient à son intérieur l'intervalle où est situé b pendant la première demi-oscillation.

La grandeur de l'oscillation de b est donc moindre que

$$4\mathrm{M}(a_2 - a_1) + 2\mathrm{M}',$$

et comme $a_2 - a_1$ et M' tendent vers zéro quand les conditions initiales

tendent vers celles de l'équilibre, on voit que l'oscillation de b s'effectue dans un intervalle tendant vers zéro et ce fait suffit pour prouver que l'équilibre est effectivement stable.

15. Les résultats de cette discussion un peu longue peuvent se présenter de la façon suivante :

Les conditions nécessaires et suffisantes de la stabilité de l'équilibre du paramètre secondaire b peuvent se répartir en deux groupes :

Premier groupe. — Ces conditions sont relatives à la nature du paramètre secondaire considéré.

Partant de la fonction génératrice G, on cherche la fonction génératrice $G_{a,b}$ relative aux deux paramètres a, b en portant dans

$$G - \beta_1 b'_1 - \ldots - \beta_{n-2} b'_{n-2},$$

les valeurs de $b'_1, \ldots, b'_{n-2}$ tirées des intégrales

$$\frac{\partial G}{\partial b'_1} = \beta_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial G}{\partial b'_{n-2}} = \beta_{n-2}.$$

On obtient ainsi, en négligeant le terme en a', qui est dérivée exacte,

$$G_{ab} = A a'^2 + 2 C a^2 b' + B b'^2 + 2 B_1 b' + C_1,$$

B_1 étant une fonction linéaire des β

$$B_1 = \omega + \sum_i \beta_i \omega_i,$$

et C_1 une fonction du second degré des β.

1° Les fonctions $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_{n-2}$ sont liées par $n-2$ relations linéaires distinctes à coefficients constants, de façon qu'elles s'expriment toutes linéairement au moyen de l'une d'entre elles ou, plus généralement, au moyen d'une certaine fonction $\theta(a)$ qui n'est pas une constante. On a alors

$$B_1 = \theta(a) P(\beta) + Q(\beta),$$

$P(\beta)$ et $Q(\beta)$ étant des fonctions linéaires et à coefficients constants des constantes arbitraires $\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$.

2° La fonction C_1 doit être une constante quels que soient les β, ou, ce qui revient au même, si on la considère comme polynome aux variables β, tous ses coefficients doivent être des constantes.

3° La fonction B doit être un polynome entier en $\theta(a)$, polynome au plus du second degré.

4° Le rapport

$$\frac{\theta'(a)}{\sqrt{AB - C^2}}$$

doit être une constante.

Deuxième groupe. — Les conditions du premier groupe étant supposées réalisées, les nouvelles conditions sont relatives au genre du mouvement $\mathfrak{M}_0$ qui fournit l'équilibre de b, c'est-à-dire aux conditions initiales déterminant le mouvement. Elles se réduisent à deux :

1° Les valeurs des β qui correspondent à l'équilibre de b ne doivent pas annuler l'expression

$$P(\beta),$$

de façon à fournir pour B_1 une fonction ne se réduisant pas à une constante.

2° Dans le mouvement $\mathfrak{M}_0$, il doit y avoir équilibre du paramètre principal.

Nous remarquerons qu'il résulte des calculs faits ou, si l'on veut, de ce que la fonction F_0 se réduit alors à un carré parfait précédé du signe $-$ que, dans les conditions précédemment énumérées, ce n'est pas seulement l'équilibre du paramètre secondaire qui est stable, mais aussi celui du paramètre principal.

16. Considérons le cas où les liaisons sont indépendantes du temps. La portion G_1 de la fonction génératrice n'existe pas.

Supposons que le système soit en équilibre et considérons un quelconque b des paramètres secondaires pour étudier sa stabilité.

Nous devons tirer $b'_1, \ldots, b'_{n-2}$ des intégrales premières

$$\frac{\partial G}{\partial b'_1} = \beta_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial G}{\partial b'_{n-2}} = \beta_{n-2},$$

qui donnent des expressions homogènes en a', b', $\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$ et former la fonction $G_{a,b}$ qui sera quadratique homogène en a', b', $\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$. Le coefficient de b' sera donc linéaire et homogène aux β, et comme les valeurs des β qui correspondent à l'équilibre sont toutes nulles, nous voyons que, pour les β de l'équilibre considéré, le coefficient de b' sera identiquement nul.

Une des conditions nécessaires de la stabilité de l'équilibre de b n'est donc certainement pas réalisée; cet équilibre est instable.

Donc : *Quand un système holonome à liaisons indépendantes du temps et dans le cas régulier d'intégration se trouve en équilibre, l'équilibre de chacun des paramètres secondaires est toujours instable.*

17. Considérons un système ayant plusieurs paramètres secondaires et supposons qu'il y en ait deux b et c qui soient en équilibre stable. Comme les conséquences tirées de la stabilité de l'équilibre d'un paramètre secondaire sont indépendantes de ce qui se passe pour les autres paramètres secondaires, on est assuré que a est aussi en équilibre.

Désignons par $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-3}$ les autres paramètres secondaires et éliminons-les au moyen des intégrales premières immédiates

$$\frac{\partial G}{\partial \rho_1} = \sigma_1 \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial G}{\partial \rho_{n-3}} = \sigma_{n-3},$$

les constantes σ étant nulles pour le mouvement $\mathfrak{M}_0$ dans lequel a, b, c sont en équilibre. On obtiendra ainsi une fonction génératrice réduite en a, b, c qui, pour $\sigma_1, \ldots$ nuls, donnera l'équilibre de a, b, c, quand on prendra les conditions initiales

$$a' = 0, \qquad b' = 0, \qquad c' = 0.$$

Cet équilibre, par hypothèse, est stable; donc, *a fortiori*, il restera stable si l'on assujettit les constantes σ à ne pas varier, c'est-à-dire à rester nulles. Nous arrivons ainsi à une fonction génératrice

$$\begin{aligned} 2G_{a,b,c} = {} & Aa'^2 + Bb'^2 + Cc'^2 + 2Db'c' + 2Ec'a' + 2Fa'b' \\ & + 2A_1a' + 2B_1b' + 2C_1c' + F_1 \end{aligned}$$

donnant des mouvements parmi lesquels il y en a un dans lequel b et c sont tous deux en équilibre stable.

Tirons c' de l'intégrale immédiate

$$Cc' + Db' + Ea' + C_1 = \gamma,$$

et portons dans

$$2G - 2\gamma c'.$$

Nous aurons une fonction génératrice réduite $2G_{ab}$ fournissant des mouvements dont l'un donnera l'équilibre stable de b; donc le terme indépendant de a' et b' devra être une constante, quelle que soit la valeur de γ. Ce terme est

$$\frac{(\gamma - C_1)^2}{C} + 2C_1\frac{\gamma - C_1}{C} + F_1 - 2\gamma\frac{\gamma - C_1}{C},$$

ou

$$F_1 - \frac{(\gamma - C_1)^2}{C},$$

et, en développant

$$F_1 - \frac{C_1^2}{C} + 2\gamma\frac{C_1}{C} - \gamma^2\frac{1}{C},$$

il en résulte que C, C_1 et F_1 doivent être des constantes. Supposons qu'il en soit ainsi et reprenons le même calcul, en éliminant cette fois le paramètre b, au moyen de l'intégrale première

$$Bb' + Dc' + Fa' + B_1 = \beta.$$

Nous en conclurons de même que B, B_1 et F_1 doivent être des constantes. En modifiant $G_{a,b,c}$ par équivalence, cette fonction se réduit alors à sa portion G_2. Cette fonction génératrice, qui est dans le cas du paragraphe 16, admettrait un équilibre général de ses trois paramètres, avec stabilité pour les deux paramètres secondaires; nous avons vu que cela n'était pas possible; donc :

Lorsqu'il y a équilibre simultané de plusieurs paramètres secondaires, il ne peut jamais y avoir plusieurs de ces équilibres qui soient stables.

18. Ce qui précède conduit à une conséquence intéressante relativement à l'équilibre d'un système matériel qui est dans le cas régulier d'intégration.

Considérons une position d'équilibre ne correspondant pas à une indétermination paramétrique, l'équilibre stable du système se traduit rigoureusement par la stabilité de son équilibre paramétrique; s'il y a indétermination paramétrique, la stabilité de l'équilibre paramétrique entraîne forcément la stabilité de l'équilibre du système, mais la réciproque n'est plus vraie, l'équilibre du système peut être stable sans qu'il y ait stabilité pour tous les paramètres; il suffit qu'elle existe pour les paramètres non indéterminés pour la position considérée, et cela tient à ce qu'une variation finie quelconque des paramètres indéterminés n'entraîne qu'une variation infiniment petite de la position du système.

Considérons alors un système matériel dans le cas régulier d'intégration et cherchons s'il peut être en équilibre paramétrique stable. D'après ce qui a été démontré au paragraphe 17, il ne peut y avoir plusieurs paramètres secondaires puisque deux tels paramètres ne peuvent être simultanément en équilibre stable.

Il y a donc forcément un paramètre principal et un seul paramètre secondaire, et comme on est dans le cas de l'équilibre simultané de ces deux paramètres, les conditions relatives à ce cas et indiquées au paragraphe 15 doivent être réalisées. Nous remarquerons immédiatement que les constantes arbitraires, désignées par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-2}$ dans ce paragraphe, n'existent pas ici, de sorte que, de même que les conditions du premier groupe, celles du second groupe sont indépendantes de l'équilibre considéré.

Nous arrivons ainsi à ce résultat.

1° Systèmes dans le cas régulier satisfaisant aux conditions :

$$n = 2;$$

$$2G = A a'^2 + 2C a' b' + B b'^2 + 2B_1 b' + C_1,$$

A, B, C, B_1, C_1, fonctions de a seulement;

B_1 n'est pas une constante;

C_1 est une constante;

$$B = \alpha B_1^2 + 2\beta B_1 + \gamma \qquad (\alpha, \beta, \gamma \text{ constantes});$$

$$\frac{\sqrt{B_1}}{\sqrt{AB - C^2}} \text{ est une constante.}$$

Pour ces systèmes, tous les équilibres paramétriques sont stables; toute position d'équilibre du système est position d'équilibre stable.

2° Systèmes dans le cas régulier et ne satisfaisant pas à toutes les conditions précédentes :

Pour ces systèmes, tous les équilibres paramétriques sont instables; toutes les positions d'équilibre du système sont des positions d'équilibre instable, sauf peut-être celles qui correspondent à des indéterminations paramétriques et qui peuvent être des positions d'équilibre stable.

19. Pour donner un exemple simple et concret des résultats que nous venons d'obtenir, il nous suffit de considérer le mouvement plan d'une molécule soumise à une *attraction* par un centre fixe, l'intensité de cette attraction étant fonction de la distance et s'annulant avec elle.

On a ici, en prenant les coordonnées polaires,

$$n = 2,$$
$$2G = \rho'^2 + \rho^2\theta'^2 + 2U(\rho);$$

donc

$$A = 1, \qquad B = \rho^2, \qquad C = 0, \qquad B_1 = 0, \qquad C_1 = 2U(\rho),$$

et le fait que le coefficient B_1 est nul montre que, quelle que soit l'intensité de l'attraction, le système est toujours de ceux dont tous les équilibres paramétriques sont instables.

Soient

$$0, \quad \rho_1, \quad \rho_2, \quad \dots$$

les valeurs positives de ρ, pour lesquelles la force $\frac{dU}{d\rho}$ s'annule. Les positions $\rho_1, \rho_2, \dots$ seront des positions d'équilibre, et ces équilibres devront être instables puisqu'il n'y a pas alors indétermination paramétrique; effectivement, en donnant, à partir d'une telle position, une vitesse initiale quelconque aussi petite qu'on voudra et perpendiculaire au rayon vecteur, ce rayon, d'après l'intégrale des aires, se mettra à tourner indéfiniment dans le même sens; il n'aura pas un mouvement oscillatoire infiniment petit et l'équilibre sera bien instable.

La théorie ne s'applique pas à l'équilibre fourni par

$$\rho = 0$$

parce qu'il y a alors indétermination paramétrique. Cet équilibre est stable ou instable suivant la loi de l'attraction.

Au lieu de considérer le mouvement absolu de la molécule, considérons maintenant son mouvement relatif par rapport à des axes issus du centre d'attraction et tournant avec la vitesse constante ω. Désignant alors par ρ et θ les coordonnées polaires relatives, les coordonnées polaires absolues sont

$$\rho, \quad \theta + \omega t;$$

donc, on a

$$\begin{aligned} 2G &= \rho'^2 + \rho^2(\theta' + \omega)^2 + 2U(\rho) \\ &= \rho'^2 + \rho^2\theta'^2 + 2\omega\rho^2\theta' + [\omega^2\rho^2 + 2U(\rho)]; \end{aligned}$$

c'est encore le cas régulier, mais avec

$$A = 1, \qquad B = \rho^2, \qquad C = 0, \qquad B_1 = \omega\rho^2, \qquad C_1 = \omega^2\rho^2 + 2U(\rho).$$

Si ω n'est pas nulle, B_1 n'est pas une constante; B est une fonction linéaire de B_1 et la dérivée $\frac{dB_1}{d\rho}$ qui est égale à $2\omega\rho$ est bien dans un rapport constant avec $\sqrt{AB - C^2}$ qui se réduit à ρ. Toutes les conditions pour avoir un système à équilibres paramétriques stables sont donc vérifiées, sauf celle relative à C_1. Cette dernière condition se réduit à

$$\omega^2\rho^2 + 2U(\rho) = \text{const.}$$

ou

$$\frac{dU}{d\rho} = -\omega^2\rho,$$

et exprime que l'attraction est proportionnelle à la distance, son intensité étant précisément celle de la force centrifuge due à la rotation ω.

Considérons une loi d'attraction proportionnelle à la distance

$$F = -\omega^2\rho;$$

elle donnera lieu à des mouvements circulaires présentant cette parti-

cularité qu'ils auront tous lieu avec la même vitesse angulaire ω, de sorte que si nous prenons des axes tournant précisément avec cette vitesse, ces mouvements constitueront des équilibres relatifs, et ceux-ci seront tous stables.

Par contre, considérons une loi d'attraction quelconque, mais autre que la précédente; elle donnera lieu à des mouvements circulaires uniformes, mais qui n'auront pas lieu avec la même vitesse angulaire, celle-ci étant

$$\sqrt{\frac{-F}{\rho}}$$

variable avec le rayon ρ du cercle décrit, puisque F n'est pas proportionnel à ρ; prenons un de ces mouvements circulaires, soit ω sa vitesse angulaire; il fournira, pour des axes animés de cette rotation, un équilibre relatif qui sera certainement instable puisque la condition relative à C_1 ne sera pas réalisée.

En revenant au mouvement absolu, nous arrivons donc à ce résultat :

Pour l'attraction proportionnelle à la distance, tous les mouvements circulaires sont des mouvements stables.

Pour toute autre loi d'attraction, tous les mouvements circulaires sont des mouvements instables.

Il est utile de faire toutefois remarquer que la propriété relative à l'attraction proportionnelle à la distance exige qu'il y ait attraction effective, c'est-à-dire que ω ne soit pas nulle; s'il en était ainsi, la condition relative à C_1 serait encore vérifiée, mais celle relative à B_1 ne le serait plus puisque B_1 deviendrait une constante nulle.

Les propriétés précédentes de l'attraction proportionnelles à la distance peuvent facilement se vérifier par l'intégration effective.

Partons des coordonnées cartésiennes relatives

$$a = \rho\cos\theta, \qquad b = \rho\sin\theta.$$

On a

$$a'^2 + b'^2 = \rho'^2 + \rho^2\theta'^2,$$
$$ab' - ba' = \rho^2\theta';$$

donc

$$2G = a'^2 + b'^2 + 2\omega(ab' - ba'),$$

ou, en ajoutant la dérivée exacte,

$$2\omega(ab' + ba'),$$
$$2G = a'^2 + b'^2 + 4\omega ab'.$$

On intégrera immédiatement en partant de l'intégrale immédiate

$$b' + 2\omega a = \lambda$$

et de l'équation de Lagrange relative à a,

$$a'' - 2\omega b' = 0;$$

on arrive ainsi à l'équation linéaire du second ordre

$$a'' + 4\omega^2 a - 2\omega\lambda = 0,$$

qui s'intègre différemment suivant que ω n'est pas nulle ou est nulle.

$\omega \neq 0$. — On a

$$a = \frac{\lambda}{2\omega} + K\cos(2\omega t + \mu),$$
$$b = \gamma - K\sin(2\omega t + \mu).$$

Pour que les vitesses initiales soient très petites, il faut et il suffit que K soit très petit, et les deux paramètres a et b oscillent tous deux dans des intervalles très petits. Il y a bien stabilité.

$\omega = 0$. — Les deux équations se réduisent à

$$b' = \lambda,$$
$$a'' = 0;$$

donc, donnent deux mouvements uniformes et, partant de la position d'équilibre avec une vitesse non nulle mais très petite, les valeurs initiales de a' et b' ne peuvent être toutes deux nulles, de sorte que l'un au moins des deux paramètres aura un mouvement uniforme effectif. Il y a bien instabilité.

SUR

CERTAINES TRANSFORMATIONS FONCTIONNELLES

ET

LEUR APPLICATION A LA THÉORIE DES FONCTIONS PERMUTABLES

PAR M. JOSEPH PÉRÈS.

I. — Préliminaires.

1. Je rappelle que l'on désigne par le produit symbolique $\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}$ ou $\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}(x, y)$ la composition

$$\int_x^y f(x, \xi)\varphi(\xi, y)\,d\xi$$

des deux fonctions $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$. Ce produit symbolique obéit aux règles de calcul d'un produit ordinaire si les fonctions f et φ sont permutables, c'est-à-dire si

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}.$$

Dans le cas où la fonction $f(x, y)$ est du premier ordre, $[f(x, x) \neq 0]$, on peut toujours, sans restreindre la généralité, supposer la fonction f égale à 1, et ses dérivées premières nulles pour $x = y$. Toutes les fonctions permutables avec $f(x, y)$ se mettent alors sous la forme (Volterra)

$$(a) \qquad \lambda(y - x) + \int_0^{y-x} \lambda(\xi)\Phi(\xi; x, y)\,d\xi,$$

λ étant une fonction arbitraire et Φ dépendant de f. Toutes ces fonctions sont d'ailleurs permutables entre elles; nous dirons qu'elles forment un corps de fonctions permutables dont Φ est la fonction génératrice.

M. Volterra a donné un procédé pour former Φ à partir de f et a prouvé que la fonction Φ vérifie la condition

$$(1)\quad \Phi(\tau; x, y-\eta) + \Phi(\eta; \tau + x, y) + \int_{x+\tau}^{y-\eta} \Phi(\eta; \zeta, y)\Phi(\tau; x, \zeta)\, d\zeta$$
$$= \Phi(\eta; x, y-\tau) + \Phi(\tau; x+\eta, y) + \int_{x+\eta}^{y-\tau} \Phi(\tau; \zeta, y)\Phi(\eta; x, \zeta)\, d\zeta.$$

Cette relation exprime simplement la permutabilité de deux fonctions du corps (¹). Elle caractérise donc les fonctions génératrices.

2. Mais il est aisé de se rendre compte que *la fonction génératrice d'un corps n'est pas unique.*

Soit Φ_0 la fonction génératrice du corps des fonctions permutables

$$\lambda(y-x) + \int_0^{y-x} \lambda(\xi)\Phi_0(\xi; x, y)\, d\xi.$$

Effectuons sur la fonction arbitraire λ la transformation de Volterra

$$(2)\qquad \lambda(\xi) = \mu(\xi) + \int_0^{\xi} \mu(\eta)\mathrm{K}(\eta; \xi)\, d\eta,$$

on a

$$\lambda(y-x) + \int_0^{y-x} \lambda(\xi)\,\Phi_0(\xi; x, y)\, d\xi = \mu(y-x) + \int_0^{y-x} \mu(\xi)\,\Phi(\xi; x, y)\, d\xi$$

avec

$$(3)\quad \Phi(\xi; x, y) = \mathrm{K}(\xi, y-x) + \Phi_0(\xi; x, y) + \int_{\xi}^{y-x} \mathrm{K}(\xi, \sigma)\Phi_0(\sigma; x, y)\, d\sigma.$$

La fonction Φ, donnée par la formule (3), engendre évidemment le même corps de fonctions permutables que Φ_0.

Inversement, d'ailleurs, *la formule* (3), *où* $\mathrm{K}(x, y)$ *est arbitraire, donne l'expression générale des fonctions génératrices d'un corps en fonction de l'une d'elles* Φ_0. En effet, si Φ_0 et Φ, sont deux fonctions

(¹) Je renvoie, pour toutes indications bibliographiques, à ma Thèse (*Journ. de Math.*, 1915) et au Mémoire de M. Volterra [*Sulla teoria delle potenze, dei logaritmi, delle funzioni di composizione* (*Atti dei Lincei*, 1916)].

génératrices d'un corps, toute fonction $\varphi(x, y)$ du corps est

$$\varphi(x, y) = \lambda(y - x) + \int_0^{y-x} \lambda(\xi)\, \Phi_0(\xi; x, y)\, d\xi$$
$$= \mu(y - x) + \int_0^{y-x} \mu(\xi)\, \Phi_1(\xi; x, y)\, d\xi.$$

φ étant donnée, les fonctions λ et μ sont déterminées; il existe donc entre elles une certaine relation. Tout revient à démontrer que cette relation est de la forme (2) : c'est immédiat, car l'équation précédente donne, pour $x = 0$,

$$\lambda(y) + \int_0^y \lambda(\xi)\, \Phi_0(\xi; 0, y)\, d\xi = \mu(y) + \int_0^y \mu(\xi)\, \Phi_1(\xi; 0, y)\, d\xi;$$

on en tire, en résolvant par rapport à λ, l'expression de λ sous la forme demandée.

3. On est ainsi amené à traiter le problème suivant : *Parmi toutes les fonctions génératrices d'un corps, déterminer les plus simples, celles qui mettront le mieux en évidence les propriétés du corps.* C'est ce problème que j'espère avoir résolu ici.

J'ai été guidé par l'idée suivante : parmi tous les corps de fonctions permutables, le plus simple, nommé par M. Volterra *corps du cycle fermé*, est celui de toutes les fonctions permutables avec l'unité. Il est composé de toutes les fonctions de $y - x$, $\lambda(y - x)$.

Un corps quelconque résulte donc du corps du cycle fermé par la transformation

$$(a) \qquad \lambda(y - x) + \int_0^{y-x} \lambda(\xi)\, \Phi(\xi; x, y)\, d\xi,$$

que je désignerai par la notation abrégée

$$\Omega(\lambda).$$

Si l'on veut pouvoir déduire les propriétés d'un corps quelconque de celles, très simples, du corps du cycle fermé, il faut choisir la fonction génératrice Φ de façon que la transformation Ω conserve la com-

position. En d'autres termes, de façon que si l'on a

$$\varphi(x, y) = \Omega(\lambda),$$
$$\psi(x, y) = \Omega(\mu),$$

on ait

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{\psi}(x, y) = \Omega\left(\overset{*}{\lambda}\overset{*}{\mu}\right).$$

En développant les calculs, l'équation précédente peut s'écrire

$$\int_0^{y-x} \lambda(\eta)\, d\eta \int_0^{y-x-\eta} \mu(\tau)\, d\tau \Big\{ \Phi(\eta + \tau;\, x, y) - \Phi(\tau;\, x + \eta, y) - \Phi(\eta, x, y - \tau) - \int_{x+\eta}^{y-\tau} d\xi\, \Phi(\eta;\, x, \xi)\, \Phi(\tau;\, \xi, y) \Big\} = 0.$$

On en déduit

$$(4) \quad \Phi(\tau + \eta;\, x, y) = \Phi(\tau;\, x + \eta, y) + \Phi(\eta;\, x, y - \tau) + \int_{x+\eta}^{y-\tau} \Phi(\eta;\, x, \zeta)\, \Phi(\tau;\, \zeta, y)\, d\zeta \quad (^1).$$

4. Dans la suite je résoudrai d'abord l'équation (4), déterminant ainsi toutes les transformations Ω qui conservent la composition.

Je montrerai alors comment les transformations ainsi obtenues peuvent servir à engendrer n'importe quel corps de fonctions permutables. J'aurai ainsi une méthode de recherche des fonctions permutables tout à fait indépendante des précédentes.

Je montrerai enfin, sur quelques exemples, comment l'expression, ainsi donnée des fonctions d'un corps, est très avantageuse pour l'étude de leurs propriétés.

II. — Résolution de l'équation fonctionnelle (4).

5. Si l'on suppose $\Phi(\tau;\, x, y)$ définie et continue dans le domaine

$$(d) \qquad 0 \leq x \leq y \leq a, \qquad 0 \leq \tau \leq y - x,$$

(1) Cette relation entraîne évidemment (1); toutes les solutions de (4) sont des fonctions génératrices.

les fonctions précédentes $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ sont définies dans le domaine

(D) $$o \leq x \leq y \leq a$$

et la condition

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{\psi} = \Omega(\overset{*}{\lambda}\overset{*}{\mu})$$

s'exprime par la relation (4), où $o \leq x \leq y \leq a$ et où τ, η, $\tau + \eta$ sont compris entre o et $y - x$.

Nous allons déterminer toutes les solutions $\Phi(\tau; x, y)$ de (4), définies et continues dans le domaine (d). On pourrait naturellement remplacer ce domaine par d'autres (*cf.* § III, n° 14). Nous avons enfin besoin de faire sur Φ une hypothèse de dérivabilité.

6. Faisons dans l'équation (4) le changement de variables

$$x + \eta = x', \qquad y - \tau = y',$$

elle devient

(4′) $$\Phi(\tau + \eta; x' - \eta, y' + \tau) = \Phi(\tau; x', y' + \tau) + \Phi(\eta; x' - \eta, y') + \int_{x'}^{y'} \Phi(\eta; x' - \eta, \zeta)\Phi(\tau; \zeta, y' + \tau)\, d\zeta.$$

Et en posant

$$\Phi(\tau; x', y') = \Psi(\tau; x', y' - \tau), \qquad \Phi(\tau; x', y') = \Psi_0(\tau; x' + \tau, y');$$

(4″) $$\Psi(\tau + \eta; x' - \eta, y' - \eta) = \Psi(\tau; x', y') + \Psi_0(\eta; x', y') + \int_{x'}^{y'} \Psi_0(\eta; x', \zeta)\, \Psi(\tau; \zeta, y')\, d\zeta.$$

En y faisant $\tau = \eta = o$, il vient

$$\Psi_0(o; x', y') + \int_{x'}^{y'} \Psi_0(o; x', \zeta)\, \Psi(o, \zeta, y')\, d\zeta,$$

ce qui prouve que

(5) $$\Phi(o; x, y) = \Psi(o; x, y) = \Psi_0(o; x, y) = o.$$

En dérivant enfin (4″) par rapport à τ et en y faisant $\tau = o$, on obtient

(6) $$\Psi'_\tau(\eta; x' - \eta, y' - \eta) = \Psi'_\tau(o; x', y') + \int_{x'}^{y'} \Psi_0(\eta; x', \zeta)\, \Psi'_\tau(o; \zeta, y')\, d\zeta.$$

et, en posant

$$\Psi'_\tau(0; x', y') = f(x', y'),$$

$$(6') \quad \Psi'_\tau(\eta; x' - \eta, y' - \eta) = f(x', y') + \int_{x'}^{y'} \Psi_0(\eta; x', \zeta) f(\zeta, y')\, d\zeta.$$

Après le changement de variables

$$x' - \eta = x,$$
$$y' - \eta = x,$$

l'équation précédente peut s'écrire

$$\Psi'_\eta(\eta; x, y) = f(x + \eta, y + \eta) + \int_x^y \Psi(\eta; x, \zeta) f(\eta + \zeta, y + \eta)\, d\zeta$$

et, en intégrant par rapport à η et tenant compte de (5), on obtient enfin

$$(7) \quad \Psi(\eta; x, y) = \int_0^\eta f(x + \eta_1, y + \eta_1)\, d\eta_1 + \int_0^\eta d\eta_1 \int_x^y d\zeta\, \Psi(\eta_1; x, \zeta) f(\eta_1 + \zeta, y + \eta_1).$$

7. Cette dernière équation est aisée à résoudre par approximations successives.

Si l'on suppose $f(x, y)$ connue dans le domaine

$$0 \leq x \leq y \leq a,$$

sa solution sera

$$\Psi(\eta; x, y) = \Psi_1 + \Psi_2 + \ldots + \Psi_n + \ldots,$$

en posant

$$\Psi_1 = \int_0^\eta f(x + \eta_1, y + \eta_1)\, d\eta_1$$

et

$$\Psi_n = \int_0^\eta d\eta_1 \int_x^y d\zeta\, \Psi_{n-1}(\eta_1; x, \zeta) f(\eta_1 + \zeta, y + \eta_1).$$

Les diverses fonctions Ψ_n se mettent sous la forme très simple suivante : en posant

$$f(x + \eta, y + \eta) = G_\eta(x, y),$$

on vérifie que

$$\Psi_n = \int_0^{\eta} d\eta_n \int_0^{\eta_n} d\eta_{n-1} \dots \int_0^{\eta_2} d\eta_1 \overset{*}{G}_{\eta_1} \overset{*}{G}_{\eta_2} \dots \overset{*}{G}_{\eta_n}(x, y).$$

Il n'y a pas de difficultés à prouver la convergence de la série des approximations, ni à prouver que les diverses approximations sont définies dans le domaine

$$0 \leqq x \leqq y, \qquad \eta \geqq 0, \qquad y + \eta \leqq a.$$

La solution $\Psi(\eta; x, y)$ de (7) est donc définie dans le même domaine.

8. Nous sommes donc conduits à poser

$$(9) \qquad \Phi(\tau; x, y) = \Psi(\tau; x, y - \tau)$$
$$= \sum_n \int_0^{\tau} d\tau_n \int_0^{\tau_n} d\tau_{n-1} \dots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \overset{*}{G}_{\tau_1} \overset{*}{G}_{\tau_2} \dots \overset{*}{G}_{\tau_n}(x, y - \tau),$$

la fonction Φ étant bien définie pour

$$0 \leqq x \leqq y \leqq a, \qquad 0 \leqq \tau \leqq y - x.$$

Les fonctions Φ ainsi construites dépendent d'une fonction arbitraire $f(x, y)$. D'après la marche suivie, il est évident que toutes les solutions cherchées de l'équation (4) peuvent se mettre sous la forme (9). Mais on ne peut pas affirmer, *a priori*, que l'expression (9) fournisse, quelle que soit $f(x, y)$, une solution de (4).

Nous allons le vérifier ; pour cela nous substituerons à Φ l'expression (9) dans l'équation (4) ou dans l'équation équivalente (4″), qui peut s'écrire :

$$\Psi(\tau + \eta; x, y) = \Psi(\tau; x + \eta, y + \eta) + \Psi(\eta; x, y) + \int_x^y \Psi(\eta; x, \zeta) \Psi(\tau; \zeta + \eta, y + \eta) d\zeta.$$

Il suffit de vérifier que

$$\Psi_1(\tau + \eta; x, y) = \Psi_1(\tau; x + \eta, y + \eta) + \Psi_1(\eta; x, y)$$

et

$$(10)\quad \Psi_n(\tau+\eta;\,x,\,y)=\Psi_n(\tau;\,x+\eta,\,y+\eta)+\Psi_n(\eta;\,x,\,y)+\sum_{p+q=n}\int_x^y \Psi_p(\eta;\,x,\,\zeta)\Psi_q(\tau;\,\zeta+\eta,\,y+\eta)\,d\zeta,$$

les indices p et q variant de 1 à $n-1$.

La première de ces formules est évidente, la seconde (10) s'établit comme suit : la relation entre Ψ_n et Ψ_{n-1} permet d'écrire le premier membre

$$\int_0^{\tau+\eta} d\eta' \int_x^y d\zeta\,\Psi_{n-1}(\eta';\,x,\zeta)f(\eta'+\zeta,\,\eta'+y)$$

ou

$$\Psi_n(\eta;\,x,\,y)+\int_0^{\tau} d\eta' \int_x^y d\zeta\,\Psi_{n-1}(\eta'+\eta;\,x,\zeta)f(\eta+\eta'+\zeta,\,\eta+\eta'+y);$$

en supposant enfin la formule (10) établie pour la valeur $n-1$ de la variable, il vient

$$\begin{aligned}
&=\Psi_n(\eta;\,x,\,y)+\int_0^{\tau} d\eta' \int_{x+\eta}^{y+\eta} d\zeta\,\Psi_{n-1}(\eta';x+\eta,\zeta)f(\eta'+\zeta,\,y+\eta'+\eta)\\
&\quad+\int_0^{\tau} d\eta' \int_x^y d\zeta\,\Psi_{n-1}(\eta;\,x,\,\zeta)f(\eta'+\eta+\zeta,\eta+\eta'+y)\\
&\quad+\sum_{p+q=n-1}\int_x^y d\zeta'\,\Psi_p(\eta;\,x,\,\zeta')\int_0^{\tau} d\eta' \int_{\zeta'}^y d\zeta\times\\
&\qquad\times\Psi_q(\eta';\,\zeta'+\eta,\,\zeta+\eta)f(\eta'+\eta+\zeta,\,y+\eta'+\eta),
\end{aligned}$$

et, en tenant compte encore de la relation entre Ψ_n et Ψ_{n-1},

$$\begin{aligned}
&=\Psi_n(\eta;\,x,\,y)+\Psi_n(\tau;\,x+\eta,\,y+\eta)+\int_x^y \Psi_{n-1}(\eta;\,x,\,\zeta)\,\Psi_1(\tau;\,\zeta+\eta,\,y+\eta)\,d\zeta\\
&\quad+\sum_{p+q=n-1}\int_x^y d\zeta\,\Psi_p(\eta;\,x,\,\zeta)\Psi_{q+1}(\tau;\,\zeta+\eta,\,y+\eta);
\end{aligned}$$

on retrouve bien le second membre de (10).

9. En résumé, *dans le domaine*

$$(d)\qquad 0\leqq x\leqq y\leqq a,\qquad 0\leqq\eta\leqq y-x,$$

toutes les solutions de l'équation fonctionnelle (4) *sont données par la formule*

$$(11)\quad \Phi(\eta; x, y) = \sum_n \int_0^{\eta} d\eta_n \int_0^{\eta_n} d\eta_{n-1} \dots \int_0^{\eta_2} d\eta_1 \, \overset{*}{G}_{\eta_1} \overset{*}{G}_{\eta_2} \dots \overset{*}{G}_{\eta_n}(x, y-\eta),$$

avec

$$G_\eta(x, y) = f(x+\eta, y+\eta),$$

$f(x,y)$ *étant une fonction arbitraire définie pour*

$$0 \leqq x \leqq y \leqq a.$$

III. — Représentation, par une des transformations précédentes, d'un corps déterminé de fonctions permutables.

10. Nous avons déterminé ainsi toutes les transformations Ω qui conservent la composition.

Chacune des fonctions Φ précédentes est fonction génératrice d'un corps de fonctions permutables. Les fonctions du corps sont données par la formule (a) et, en mettant à part les singularités qui peuvent provenir de $\lambda(y-x)$, sont définies dans le domaine

$$0 \leqq x \leqq y \leqq a,$$

puisque (d) est le domaine d'existence de Φ.

11. Nous obtenons ainsi tous les corps de fonctions permutables. Il suffit, pour s'en assurer, de prouver que, $F(x, y)$ étant une fonction quelconque, telle que

$$(12)\qquad F(x, x) = 1, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{y=x} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y=x} = 0,$$

et définie pour

$$0 \leqq x \leqq y \leqq a,$$

on peut choisir l'arbitraire $f(x, y)$ dont dépend Φ, de façon que

$$F(x, y) = 1 + \int_0^{y-x} \Phi(\tau; x, y)\, d\tau = \Omega(1)$$

ou

$$F(x, y) = 1 + \int_0^{y-x} \Psi(\tau; x, y-\tau)\, d\tau.$$

12. Pour résoudre cette équation, mettons en évidence la façon dont le deuxième membre dépend de f.

En posant

$$K(x, y) = \int_0^{y-x} \Psi(\tau; x, y-\tau)\, d\tau,$$

il vient, d'après l'équation (7),

$$K(x, y) = \int_0^{y-x} d\tau \int_0^{\tau} f(x+\eta_1, y+\eta_1-\tau)\, d\eta_1 + \int_0^{y-x} d\tau \int_0^{\tau} d\eta_1 \int_x^{y-\tau} \Psi(\eta_1; x, \zeta) f(\eta_1+\zeta, y+\eta_1-\tau)\, d\zeta,$$

d'où, après quelques changements de variable,

$$K(x, y) = \int_x^y \left| d\xi_1 \int_{\xi_1}^y d\xi_2 f(\xi_1, \xi_2) + \int_x^y d\xi_1 \int_{\xi_1}^y d\xi_2 \int_0^{\xi_1 - x} d\eta \times \right. \\ \left. \times \Psi(\eta; x, \xi_1 - \eta) f(\xi_1, \xi_2), \right.$$

c'est-à-dire, symboliquement,

$$K(x, y) = \overset{***}{1 f 1} + \overset{*}{K} \overset{**}{f 1}.$$

On en tire

$$K(x, y) = \overset{***}{1 f 1} + \overset{**}{1 f 1} \overset{**}{f 1} + \overset{*****}{1 f 1 f 1 f 1} + \ldots.$$

13. L'équation qui doit déterminer f est donc

$$F(x, y) = 1 + \overset{***}{1 f 1} + \overset{*****}{1 f 1 f 1} + \ldots.$$

Grâce aux conditions (12) on obtient une équation équivalente en la dérivant par rapport à x et à y. En posant $\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = H$, cette équation s'écrit

$$-H = f + \overset{***}{f 1 f} + \overset{*****}{f 1 f 1 f} + \ldots$$

ou

$$-\mathrm{H} = \overset{*}{f}\frac{\overset{*}{1^0}}{\overset{*}{1^0} - \overset{**}{1f}},$$

d'où

$$-\overset{*}{\mathrm{H}}\left(\overset{*}{1^0} - \overset{**}{1f}\right) = \overset{*}{f},$$

d'où

$$f = -\frac{\overset{*}{1^0}}{\overset{*}{1^0} - \overset{*}{\mathrm{H}}\overset{*}{1}}\overset{*}{\mathrm{H}} = -\overset{*}{\mathrm{H}} - \overset{*}{\mathrm{H}}\overset{*}{1}\overset{*}{\mathrm{H}} - \overset{*}{\mathrm{H}}\overset{*}{1}\overset{*}{\mathrm{H}}\overset{*}{1}\overset{*}{\mathrm{H}} - \dots.$$

14. Le problème de la recherche des fonctions permutables avec F est ainsi résolu. La seule restriction étant l'existence de $\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x\,\partial y}$.

Nous nous sommes placés, jusqu'à présent, dans le domaine

$$0 \leq x \leq y \leq a.$$

Il n'y a naturellement aucune difficulté à le remplacer par

$$a \leq x \leq y \leq b,$$

ou plus généralement par tout domaine tel que la composition de deux fonctions définies dans ce domaine fournisse une nouvelle fonction définie dans ce même domaine.

IV. — Applications à quelques développements en série.

15. M. Volterra a remarqué que la série

$$a_0\mathrm{F}(x, y) + a_1\overset{*}{\mathrm{F}}{}^2(x, y) + \dots + a_n\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{n+1}(x, y) + \dots \tag{13}$$

représente, si elle converge, une fonction permutable avec F.

J'ai montré, dans ma Thèse (¹), en me limitant au cas où $\mathrm{F}(x, y)$ est analytique, que toutes les fonctions $\mathrm{G}(x, y)$, permutables avec $\mathrm{F}(x, y)$ et analytiques dans un voisinage de $y = x$, y admettent un développement de forme (13) convergent; la condition nécessaire et

(¹) Chapitre IV.

suffisante de convergence de (13) étant que la série

$$\sum a_n \frac{z^n}{n!} \tag{14}$$

représente un élément de fonction analytique. Les autres fonctions $G(x, y)$ admettent des développements en série de polynomes symboliques de F.

Je puis, maintenant, grâce à l'étude précédente, compléter ces résultats, les étendant aux fonctions non analytiques et précisant la relation qui existe entre (13) et (14).

16. Remarquons d'abord que la relation

$$\overset{*}{\Omega}(\lambda)\,\overset{*}{\Omega}(\mu) = \Omega\left(\overset{*}{\lambda}\overset{*}{\mu}\right),$$

vérifiée par les transformations définies au paragraphe II, entraîne, si n est entier,

$$\left[\overset{*}{\Omega}(\lambda)\right]^n = \Omega\left(\overset{*}{\lambda}^n\right).$$

En particulier, si l'on a choisi Ω comme il vient d'être dit (§ III), on a

$$F(x, y) = \Omega(1),$$

d'où

$$\overset{*}{F}^n(x, y) = \Omega\left(\overset{*}{1}^n\right) \tag{15}$$

avec

$$\overset{*}{1}^n = \frac{(y-x)^{n-1}}{\Gamma(n)}.$$

La relation (15) entraîne immédiatement

$$\overset{*}{F}^{n+1}(x, y) = \frac{(y-x)^n}{n!}\left\{1 + \theta\,\frac{M(x-y)^2}{n+2}\right\},$$

M étant une constante et θ compris entre o et 1. Il en résulte que les deux séries

$$\sum a_n \overset{*}{F}^{n+1} \tag{13}$$

et

$$\sum a_n \overset{*}{1}^{n+1} = \sum a_n \frac{(y-x)^n}{n!} \tag{14}$$

ont même domaine de convergence.

17. Étant donnée une fonction $G(x, y)$, permutable avec $F(x, y)$, il est aisé de reconnaître si elle admet un développement (13). Il existe une fonction $\lambda(y-x)$ telle que

$$G(x, y) = \Omega(\lambda).$$

Si λ est analytique et admet un développement convergent (14), on en déduira, en lui appliquant l'opération Ω, le développement (13) pour $G(x, y)$; et inversement.

Sinon, la fonction λ admet, sous restriction de continuité, un développement en série de polynomes, uniformément convergent

$$\lambda(y-x) = \sum_0^{\infty}{}_n \left(a_0^{(n)} + a_1^{(n)} \frac{y-x}{1} + \ldots + a_{p_n}^{(n)} \frac{(y-x)^{p_n}}{p_n!} \right),$$

on en déduit, par l'opération Ω, pour $G(x, y)$, le développement

$$G = \sum_0^{\infty}{}_n \left(a_0^{(n)} F + a_1^{(n)} \overset{*}{F}^2 + \ldots + a_{p_n}^{(n)} \overset{*}{F}^{p_n+1} \right),$$

uniformément convergent. Les deux séries précédentes sont, d'ailleurs, simultanément uniformément convergentes.

Ce sont les résultats annoncés au début de ce paragraphe.

18. Je veux signaler, pour terminer, une autre application des considérations précédentes.

M. Volterra a défini, par la résolution de l'équation

$$\overset{*}{\varphi}^q = f,$$

la fonction $\overset{*}{f}^{\frac{1}{q}}$ et en a déduit la définition de $\overset{*}{f}^{\frac{p}{q}}$, l'exposant $\frac{p}{q}$ étant

rationnel. Il indique, dans le Mémoire déjà cité, que, si $\overset{*}{f}^{\frac{p}{q}}$ tend vers une limite lorsque $\frac{p}{q}$ tend vers l'irrationnelle z, on pourra prendre cette limite pour définition de $\overset{*}{f}^{z}$.

L'existence de cette limite était difficile à démontrer, car la définition précédente de $\overset{*}{f}^{\frac{p}{q}}$ ne mettait pas en évidence la façon dont cette fonction dépend de $\frac{p}{q}$. M. Volterra y parvient en développant d'abord la théorie, très élégante, des logarithmes de composition.

Grâce aux considérations précédentes, la définition de $\overset{*}{f}^{z}$ est immédiate. On prouve sans peine que

$$\overset{*}{f}^{\frac{p}{q}} = \Omega\left(\overset{*}{1}^{\frac{p}{q}}\right),$$

et l'on en déduit que

$$\overset{*}{f}^{z} = \Omega\left(\overset{*}{1}^{z}\right). \tag{16}$$

On peut enfin développer, à partir de la formule (16), la théorie des logarithmes de composition.

Si l'exposant z est négatif, on peut encore écrire la formule (16), en étendant convenablement la signification du signe intégrale qui y figure, pour que cette intégrale conserve un sens (¹). Comme j'ai déjà montré (²) l'intérêt de semblables extensions du sens de l'intégrale, dans la théorie de la composition, et comme j'aurai sans doute à revenir sur ce sujet, je me borne à indiquer le fait.

(¹) Si z n'est pas entier, il suffit de prendre la partie finie de l'intégrale.

(²) *Rend. R. Acc. dei Lincei*, 7 et 21 janvier 1917.

MÉMOIRE

SUR LES

INVOLUTIONS APPARTENANT A UNE SURFACE DE GENRES 1

(DEUXIÈME PARTIE)

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

Dans la première Partie de ce Mémoire(1), nous avons déterminé les involutions de genres 1 appartenant à une surface de genres 1 ($p_a = P_4 = 1$), non composées au moyen de deux involutions n'ayant aucune coïncidence en commun. Nous avons construit des surfaces normales images de ces involutions et déterminé les singularités que ces surfaces possèdent aux points de diramation. Pour compléter cette étude, il convient de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface de genres 1 soit l'image d'une involution appartenant à une surface de genres 1. Ce sont ces questions qui sont étudiées dans cette seconde Partie. Nous avons en outre déterminé les involutions qui avaient été exclues de nos premières recherches, c'est-à-dire les involutions composées au moyen de deux (ou plusieurs) involutions n'ayant pas de point de coïncidence en commun. Cette dernière recherche n'offre pas grande difficulté, mais elle se présente d'elle-même dans l'étude des surfaces images d'involutions d'ordre 8.

Nous avons été conduit à introduire les définitions suivantes. Une involution, non composée au moyen de deux involutions n'ayant pas de point de coïncidence commun, sera dite *involution de première*

(1) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XXXI, 1914, p. 357-430.

espèce; dans le cas opposé, *de seconde espèce*. Une surface image d'une involution d'ordre n sera dite *surface de rang n*.

CHAPITRE VI.

LES INVOLUTIONS DE SECONDE ESPÈCE.

46. Soit, sur la surface F, de genres 1 ($p_a = P_4 = 1$), une involution I_n, d'ordre n, de genres 1 et de seconde espèce. Désignons par $(T_1 \equiv 1, T_2, \ldots, T_\mu)$ une base du groupe de transformations birationnelles de F en elle-même, générateur de I_n, par $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\mu$ les périodes respectives des transformations $T_1, T_2, \ldots, T_\mu$, et supposons que I_n soit composée au moyen d'une involution I_ν, d'ordre ν et de première espèce. Soit $(T_1 \equiv 1, T_2, \ldots, T_\eta)$ une base du groupe générateur de I_ν. Par hypothèse, aucun point de coïncidence de l'involution I_ν n'est invariant pour l'une des transformations $T_{\eta+1}, T_{\eta+2}, \ldots, T_\mu$.

Considérons un groupe de I_ν formé de $\frac{\nu}{\tau}$ points de coïncidence d'ordre τ. Les points de ce groupe sont transportés, par $T_{\eta+1}$, $T_{\eta+2}, \ldots, T_\mu$ en $\frac{n-\nu}{\tau}$ nouveaux points qui forment, avec les premiers, un groupe de I_n. Mais I_n étant composée au moyen de I_ν, ce groupe de $\frac{n}{\tau}$ points doit se partager en $\frac{n}{\nu}$ groupes de $\frac{\nu}{\tau}$ points de coïncidence τ-uple de I_ν. Par suite, le nombre de groupes de I_ν formés de points de coïncidence τ-uple, est divisible par $\frac{n}{\nu}$.

Donc, *si une involution de deuxième espèce* I_n *est composée au moyen d'une involution de première espèce* I_ν *et n'est composée avec aucune autre involution de première espèce qui serait elle-même composée au moyen de* I_ν, *le nombre des groupes de* I_ν *formés de points de coïncidence d'ordre* τ *est divisible par* $\frac{n}{\nu}$.

Cette remarque très simple permet de déterminer les involutions de seconde espèce, en se reportant au Tableau du n° 43 de la première Partie de ce Mémoire.

Si l'on suppose $\nu = 2$, $\tau = 2$ et $\frac{n}{2}$ doit diviser 8, donc on peut avoir $n = 4$, 8 ou 16.

Si $\nu = 3$, on a $\tau = 3$ et $\frac{n}{3}$ doit diviser 6; donc $n = 9$ ou $n = 18$.

Lorsque $\nu = 4$, on peut prendre $\tau = 2$ et $\frac{n}{4}$ doit diviser 2. On a donc $n = 8$.

Lorsque $\nu = 6$, $\tau = 2$, $\frac{n}{6}$ doit diviser 2; donc $n = 12$.

Si $\nu = 8$, deux cas peuvent se présenter, les involutions d'ordre 8 et de première espèce étant de deux sortes. Pour la première sorte, si $\tau = 2$, $\frac{n}{8}$ doit diviser 1, ce qui est absurde. Pour la seconde, si $\tau = 4$, $\frac{n}{8}$ doit diviser 3, et, si $\tau = 8$, $\frac{n}{8}$ doit diviser 2, ce qui est également absurde. On ne peut donc avoir $\nu = 8$.

Enfin, si $\nu = 12$, $\tau = 3$, $\frac{n}{12}$ doit diviser 1, ce qui est absurde.

47. Nous venons de voir qu'il pourrait être possible d'avoir $n = 18$. Remarquons que dans ce cas il existe toujours, parmi les transformations génératrices de I_n, une transformation T de période 2; c'est là une propriété bien connue des groupes finis de substitutions. Mais alors, nous venons de voir que l'on a $n = 4$, 8 ou 16. Le cas $n = 18$ ne peut donc se présenter.

Considérons maintenant le cas $n = 12$, $\nu = 6$. Soit T une transformation ne faisant pas partie du groupe générateur de I_6, mais bien de celui de I_{12}. T ne peut avoir la période 2, 3 ou 4, sans quoi on ne pourrait avoir $n = 12$; T a donc la période 6. Mais alors, T transforme un groupe de I_6 formé de deux points de coïncidence triple en cinq autres groupes analogues de I_6; cela est absurde, puisque cette involution ne possède que deux pareils groupes. On ne peut donc avoir $n = 12$.

48. Nous avons trouvé que, pour $n = 8$, on pourrait avoir $\nu = 4$; nous allons prouver que cette hypothèse conduit à une absurdité.

L'involution I_4 étant cyclique, soit T_2 sa transformation génératrice et soit $(1, T_2, T_3)$ une base du groupe générateur de I_8. T_3 a la période 2 ou 4.

Si T_3 a la période 4, les transformations

$$\begin{array}{llll} T_1=1, & T_2, & T_2^2, & T_2^3, \\ T_3, & T_2T_3, & T_2^2T_3, & T_2^3T_3, \\ T_3^2, & T_2T_3^2, & T_2^2T_3^2, & T_2^3T_3^2, \\ T_3^3, & T_2T_3^3, & T_2^2T_3^3, & T_2^3T_3^3 \end{array}$$

appartiennent toutes au groupe générateur de I_8 et doivent donc se réduire à 8 transformations distinctes. On voit facilement que l'on doit avoir $T_2^2 = T_3^2$. Mais alors les involutions engendrées par T_2 et T_3 ont en commun les points de coïncidence de l'involution engendrée par T_2^2. Cela est impossible puisque, alors, I_8 serait de première espèce.

Si T_3 a la période 2, le groupe générateur de l'involution I_8 est formé par les transformations

$$\begin{array}{llll} T_1=1, & T_2, & T_3^2, & T_2^3, \\ T_3, & T_2T_3, & T_2^2T_3, & T_2^3T_3. \end{array}$$

Les transformations de la seconde ligne de ce tableau sont certainement de période 2, sans quoi il serait possible de répéter le raisonnement précédent. Par suite, I_8 possède 4 points de coïncidence quadruple (formant 2 groupes) et 36 points de coïncidence double (formant 9 groupes). A l'involution I_8 correspond, sur la surface de genres 1 image de l'involution engendrée par T_3, une involution d'ordre 4 possédant 2 points de coïncidence quadruple et 14 points de coïncidence double, ce qui est impossible. L'involution I_8 ne peut donc exister.

En résumé, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Une involution de seconde espèce ne peut être composée qu'au moyen d'involutions de première espèce, d'ordre 2 ou 3.

19. Considérons, sur la surface F, une involution de seconde espèce I_n, d'ordre $n = 2^\xi$, et soit $(T_1 = 1, T_2, \ldots, T_{\xi+1})$ une base du groupe générateur de cette involution ($\xi = 2, 3, 4$).

La transformation T_iT_k a la période 2, comme nous venons de le voir; on a donc

$$T_iT_k = T_kT_i,$$

c'est-à-dire que le groupe est abélien.

Les transformations génératrices de I_n sont, outre l'identité, au nombre de $2^\xi - 1$, et, toutes étant de période 2, elles laissent $8(2^\xi - 1)$ points invariants. L'involution I_n possède donc $2^{4-\xi}(2^\xi - 1)$ groupes formés de points de coïncidence double. Nous avons appris à former, dans la première Partie de ce travail (Chap. I), des systèmes linéaires de courbes (incomplets), dépourvus de points-base, composés avec une involution donnée, et, en rapportant projectivement les courbes de tels systèmes aux hyperplans d'un espace linéaire convenablement choisi, des surfaces simples et normales, images de l'involution.

Soit Φ une surface simple et normale, image de l'involution I_n. A chaque groupe formé de points de coïncidence de I_n correspond un point de diramation de Φ qui est un point double conique de cette surface (voir ce *Mémoire*, 1re Partie, Chap. III, § 1); par suite :

Une involution d'ordre 2^ξ, de genres 1 et de seconde espèce, sur une surface de genres 1, est engendrée par des transformations de période 2, formant un groupe abélien. Elle possède $8(2^\xi - 1)$ points de coïncidence double ($\xi = 2, 3$ ou 4).

Une surface de genres 1, de rang 2^ξ et de seconde espèce, simple et normale, possède $2^{4-\xi}(2^\xi - 1)$ points de diramation double qui sont des points doubles coniques de cette surface.

50. Soit I_9 une involution d'ordre 9 et de seconde espèce appartenant à F, et soit $(T_1 = 1, T_2, T_3)$ une base du groupe générateur de cette involution. Les transformations T_2, T_3 sont de période 3 et les deux tableaux

$$\left\{\begin{array}{llll} T_1 = 1, & T_2 & T_2^2, \\ T_3, & T_2T_3, & T_2^2T_3, \\ T_3^2, & T_2T_3^2, & T_2^2T_3^2, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llll} T_1 = 1, & T_3, & T_3^2, \\ T_2, & T_3T_2, & T_3^2T_2, \\ T_2^2, & T_3T_2^2, & T_3^2T_2^2 \end{array}\right.$$

doivent coïncider. On doit donc avoir $T_2T_3 = T_3T_2$, c'est-à-dire que le groupe générateur est abélien. Toutes les transformations de ce groupe doivent d'ailleurs avoir la période 3.

L'involution I_9 est composée au moyen de quatre involutions cubiques engendrées respectivement par T_2, T_3, T_2T_3 et $T_2^2T_3$; elle possède par suite 24 points de coïncidence triple se répartissant en 8 groupes de 3 points.

Une surface normale et simple Φ, image de l'involution I_9, possède donc 8 points de diramation qui sont des points doubles biplanaires ordinaires de la surface (ce Mémoire, 1re Partie, Chap. II). Donc :

Une involution d'ordre 9, *de genres* 1 *et de seconde espèce, sur une surface de genres* 1, *est engendrée par un groupe abélien de transformations de période* 3; *elle possède* 8 *groupes de* 3 *points de coïncidence triple.*

Une surface de genres 1, *de rang* 9 *et de seconde espèce, simple et normale, possède* 8 *points doubles biplanaires ordinaires.*

CHAPITRE VII.

SURFACES DE RANG 2 ET SURFACES DE RANG 2^α, DE SECONDE ESPÈCE.

51. Soit Φ une surface simple, normale, de genres 1 ($p_a = P_4 = 1$), de rang 2, située dans un espace linéaire S_π à π dimensions. Cette surface a, comme on sait, l'ordre $2\pi - 2$ et ses sections hyperplanes ont le genre π. De plus, elle possède 8 points doubles coniques dont chacun est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré -2. Soient $|\Gamma|$ le système des sections hyperplanes de Φ; A_1, A_2, ..., A_8 les courbes rationnelles auxquelles sont respectivement équivalents les huit points doubles coniques.

Dans un travail sur les surfaces doubles ayant un nombre fini de points de diramation (1), nous avons établi un théorème qui, dans le cas actuel, devient :

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface normale de genres 1, *simple, soit de rang* 2, *sont que :*

1° *La surface possède* 8 *points doubles;*

(1) *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de*

2° *Parmi les hyperquadriques passant par ces* 8 *points doubles, il y en a touchant la surface en chaque point de la courbe d'intersection.*

De plus, si l'on désigne par Γ_0 la courbe d'intersection de Φ avec une des hyperquadriques dont il vient d'être question, on a

$$2\Gamma_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_8 \equiv 2\Gamma;$$

$|\Gamma_0|$ est de genre $\pi - 2$ et de degré $2\pi - 6$. Les courbes Γ_0 sont d'ordre $2\pi - 2$ et il y a, le long de chacune d'elles, une hyperquadrique touchant Φ.

Les conditions pour que la surface Φ soit de rang 2 sont donc au nombre de 9, et ce nombre ne peut être réduit.

Tout d'abord, l'existence des 8 points doubles n'entraîne pas l'existence d'une hyperquadrique passant par ces points et touchant Φ en chaque point d'intersection. En effet, si Φ est une surface du quatrième ordre de S_3, il faut, pour qu'elle soit de rang 2, que les 8 points doubles soient les points-base d'un réseau de quadriques. Or, il existe des surfaces du quatrième ordre possédant 8 points doubles coniques non situés sur ∞^2 quadriques (1).

En second lieu, le nombre des points doubles doit être fixé, car il existe des surfaces de genres 1, normales, de $S_r (r \geq 4)$ possédant 16 points doubles coniques et des hyperquadriques passant par ces points et touchant la surface en chaque point d'intersection ; ce sont des surfaces images d'involutions régulières d'ordre 2 appartenant à une surface de Picard ($p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$) (2).

52. Considérons maintenant une surface simple, normale, de genres 1, Φ, de rang 4 et de deuxième espèce, située dans un S_π. Cette surface possède 12 points doubles coniques qui sont des points de diramation ordinaire. Désignons par F une surface de genres 1 portant l'involution d'ordre 4 représentée par Φ et telle qu'à une section hyper-

---

diramation (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 3e série, t. V, 1914, p. 289-312).

(1) K. Rohn, *Ueber Flächen 4. Ordnung mit acht bis zechszehn Knotenpuncten* (*Berichte K. Gesell. zu Leipzig*, t. XXXVI, 1884).

(2) *Voir* par exemple notre *Mémoire sur les surfaces doubles* (*loc. cit.*).

plane de Φ corresponde une section hyperplane de F. On doit alors prendre pour modèle projectif de F une surface normale simple de $S_{4\pi-3}$. Soient T_1, T_2 les transformations homographiques involutives engendrant sur F l'involution I_4 considérée ; on a $T_1T_2 = T_2T_1$.

Au système $|\Gamma|$ des sections hyperplanes de Φ correspond, dans le système $|C|$ des sections hyperplanes de F, un système $|C_0|$, de dimension π, dépourvu de points-base.

L'homographie T_1 laisse invariantes, dans $|C|$, les courbes de deux systèmes linéaires $|C_{01}|$, $|C_1|$; le premier contient $|C_0|$ et est dépourvu de points-base ; le second possède 8 points-base qui sont les points de F invariants pour T_1. L'involution d'ordre 2 engendrée sur F par T_1 étant de genres 1, $|C_{01}|$ a la dimension $2\pi - 1$ et $|C_1|$ la dimension $2\pi - 3$.

La transformation T_2 agit comme une homographie sur le système $|C_{01}|$ et, par conséquent, ce système contient deux systèmes de courbes invariantes pour T_2, à savoir $|C_0|$ et un système $|C_{12}|$ de dimension $\pi - 2$. Les courbes C_{12} passent par les 16 points invariants pour T_2 ou pour $T_3 = T_1T_2$. Il leur correspond, sur Φ, des courbes Γ_3, de genre $\pi - 2$ et de degré $2\pi - 6$.

A une courbe C quelconque correspond, sur Φ, une courbe découpée par une hypersurface d'ordre 4. Si, en particulier, cette courbe C est une courbe C_{12}, cette hypersurface devient une hyperquadrique comptée 2 fois, qui touche la surface Φ tout le long de la courbe Γ_3 correspondante. En d'autres termes, le long de chaque courbe du système $|\Gamma_3|$, il y a une hyperquadrique touchant Φ. Ces hyperquadriques passent par 8 des 12 points de diramation de Φ.

Il existe de même, sur Φ, deux systèmes $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$, de même genre $\pi - 2$, jouissant des mêmes propriétés.

Si l'on désigne par $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{21}, \ldots, A_{34}$ les courbes rationnelles de degré -2 auxquelles sont équivalents les points de diramation de Φ, on a les relations fonctionnelles

$$2\Gamma_3 + A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} + A_{21} + \ldots + A_{24} \equiv 2\Gamma,$$
$$2\Gamma_1 + A_{21} + \ldots + A_{24} + A_{31} + \ldots + A_{34} \equiv 2\Gamma,$$
$$2\Gamma_2 + A_{31} + \ldots + A_{34} + A_{11} + \ldots + A_{14} \equiv 2\Gamma.$$

Soient :

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_\pi) = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_{\pi-2} = 0$$

les équations de la surface Φ;

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_\pi) = 0, \qquad f_2(x_1, x_2, \ldots, x_\pi) = 0$$

les équations de deux hyperquadriques touchant Φ respectivement le long d'une courbe Γ_1 et d'une courbe Γ_2. Les équations

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_{\pi-2} = 0, x_{\pi+1}^2 = f_1, x_{\pi+2}^2 = f_2$$

représentent une surface F′ de genres 1, contenant une involution I_4 dont Φ est l'image.

Pour le démontrer, observons que dans la correspondance $(1, 4)$ définie entre Φ et F′, il n'y a diramation que dans le domaine des 12 points doubles de Φ. Par suite, les courbes canonique et pluricanoniques de F′ sont, d'après un théorème bien connu de M. Enriques, d'ordre zéro. F′ a donc les genres $p_g = P_2 = \ldots = P_i = 1$ et, de plus, $p^{(1)} = 1$.

Considérons ensuite un faisceau de sections hyperplanes de Φ ; on sait qu'il y en a $6(\pi - 1)$ qui ont un point double en un point simple de Φ. Considérons les courbes qui correspondent, sur F′, à ces sections hyperplanes. Si l'on désigne par I l'invariant de Zeuthen-Segre de F′, on trouve qu'il y a $I + 24\pi - 20$ de ces courbes ayant un point double. Observons qu'à une section hyperplane ayant un point double en un point simple de Φ correspond une courbe de F′ ayant 4 points doubles, et qu'à une section hyperplane de Φ passant par un des points de diramation correspond sur F′ une courbe ayant 2 points doubles. Par suite, on a

$$I + 24\pi - 20 = 24(\pi - 1) + 24, \qquad \text{d'où} \qquad I = 20.$$

On en conclut

$$p_a = \frac{1}{12}(I + p^{(1)} - 9) = 1.$$

La surface F′ ayant les genres $p_a = P_4 = 1$ est bien une surface de genres 1.

Les conditions nécessaires et suffisantes, pour qu'une surface normale de genres 1 soit de rang 4 et de seconde espèce, sont :

1° *Que la surface possède 12 points doubles coniques ;*

2° *Que l'on puisse répartir ces* 12 *points doubles en* 2 *groupes de* 8 *ayant* 4 *points communs, et que parmi les hyperquadriques passant par les points de chacun de ces groupes, il y en ait qui touchent la surface en chaque point d'intersection.*

53. Soit maintenant Φ une surface normale de genres 1, de rang 8 et de seconde espèce, située dans un espace S_π. Nous savons qu'elle possède 14 points doubles coniques qui sont les points de diramation. En raisonnant comme on vient de le faire dans le cas d'une surface de rang 4 et de seconde espèce, on arrive aux résultats suivants :

Désignons par A_{11}, A_{12} ; A_{21}, A_{22} ; ... ; A_{71}, A_{72} les 14 courbes rationnelles de degré $\pi - 2$ auxquelles sont équivalents les 14 points doubles coniques. Il existe 7 systèmes linéaires de genre $\pi - 2$ tels que

$$2\Gamma_{123} + A_{41} + A_{42} + A_{51} + A_{52} + A_{61} + A_{62} + A_{71} + A_{72} \equiv 2\Gamma,$$
$$2\Gamma_{246} + A_{11} + A_{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{71} + A_{72} \equiv 2\Gamma,$$
$$2\Gamma_{145} + A_{21} + A_{22} + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{71} + A_{72} \equiv 2\Gamma,$$
$$2\Gamma_{167} + A_{21} + A_{22} + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{51} + A_{52} \equiv 2\Gamma,$$
$$2\Gamma_{257} + A_{11} + A_{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{61} + A_{62} \equiv 2\Gamma,$$
$$2\Gamma_{347} + A_{11} + A_{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{61} + A_{62} \equiv 2\Gamma,$$
$$2\Gamma_{356} + A_{11} + A_{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{71} + A_{72} \equiv 2\Gamma,$$

$|\Gamma|$ étant le système des sections hyperplanes de Φ.

Le long de chacune des courbes Γ_{ikl}, il y a une hyperquadrique touchant la surface Φ.

Enfin,

Les conditions nécessaires et suffisantes, pour qu'une surface normale de genres 1 *soit de rang* 8 *et de seconde espèce, sont :*

1° *Que la surface possède* 14 *points doubles coniques ;*

2° *Que l'on puisse répartir les* 14 *points doubles en* 3 *groupes de* 8 *points ayant deux à deux* 4 *points communs, et que parmi les hyperquadriques passant par les points de chacun de ces groupes, il y en ait qui touchent la surface en chaque point d'intersection.*

54. On parvient de la même manière à des résultats analogues pour les surfaces normales Φ, de rang 16 et de seconde espèce.

Une surface normale de genres 1, Φ, simple, de rang 16 et de seconde espèce, possède 15 points de diramation qui sont des points doubles coniques. Désignons par $A_1, A_2, \ldots, A_{15}$ les courbes rationnelles de degré — 2 équivalentes à ces points. Il existe sur Φ 15 systèmes linéaires de genre $\pi - 2$ tels que

$$2\Gamma_{1234567} + A_8 + A_9 + A_{10} + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{15} \equiv 2\Gamma,$$
$$2\Gamma_{12489,10,12} + A_3 + A_5 + A_6 + A_7 + A_{11} + A_{13} + A_{14} + A_{15} \equiv 2\Gamma,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le long de chacune de ces courbes, il y a une hyperquadrique touchant Φ.

Les conditions nécessaires et suffisantes, pour qu'une surface normale de genres 1 *soit de rang* 16 *et de deuxième espèce, sont :*

1° *Que la surface possède* 15 *points doubles coniques ;*

2° *Que l'on puisse partager ces* 15 *points en* 4 *groupes de* 8 *points ayant deux à deux* 4 *points communs, et que parmi les hyperquadriques passant par les points de chacun de ces groupes, il y en ait qui touchent la surface en chaque point d'intersection.*

CHAPITRE VIII.

SURFACES DE RANG 3 ET DE RANG 9.

55. Soit Φ une surface simple, normale, de genres 1 et de rang 3, située dans un espace linéaire S_π à π dimensions. Cette surface possède 6 points doubles biplanaires ordinaires qui sont les points de diramation. Soit F une surface normale, de genres 1, contenant une involution I_3, d'ordre 3, dont Φ est l'image, et telle qu'à une section hyperplane de Φ corresponde une section hyperplane de F. Il en résulte que F est d'ordre $6(\pi - 1)$, à sections hyperplanes de genre $3\pi - 2$, située dans un espace linéaire à $3\pi - 2$ dimensions, et que cette surface est simple.

L'involution I_3 est cyclique et la transformation birationnelle T qui l'engendre, échangeant entre elles les sections hyperplanes de F, est une homographie cyclique de période 3.

Aux sections hyperplanes Γ de Φ correspondent, sur F, des sections hyperplanes C formant un système incomplet de dimension π, dépourvu de points-base. Les hyperplans contenant ces courbes C forment un système uni de l'homographie T. Les six points de coïncidence P_1, P_2, ..., P_6 de I_3 sont situés sur un espace uni E et les hyperplans passant par cet espace E sont échangés entre eux par T. Nous avons vu (première Partie) qu'il y a deux directions issues de chacun des points P_1, ..., P_6, unies pour T, par conséquent, il y aura deux systèmes d'hyperplans dont chaque élément sera transformé en lui-même par T. Les hyperplans d'un système passeront par une des directions unies de chacun des points P_1, P_2, ..., P_6 ; les hyperplans de l'autre système par les autres directions unies.

Considérons un de ces systèmes d'hyperplans et soit $|C_1|$ le système de courbes qu'il découpe sur F. Le système $|C_1|$ possède six points-base P_1, P_2, ..., P_6, où ses courbes ont mêmes tangentes fixes. Soit $|\Gamma_1|$ le système de courbes de Φ qui correspond à $|C_1|$. Entre une courbe Γ_1 et la courbe C_1, de genre $3\pi - 2$, homologue, nous avons une correspondance (1, 3), possédant six points de coïncidence, donc Γ_1 a le genre $\pi - 2$. Φ étant de genres 1, $|\Gamma_1|$ a le degré $2\pi - 6$ et la dimension $\pi - 2$, $|C_1|$ a donc le degré effectif $6\pi - 18$ et la dimension $\pi - 2$.

De même, Φ possède un deuxième système $|\Gamma_2|$, de mêmes caractères que $|\Gamma_1|$ et qui correspond à l'autre système d'hyperplans rencontré plus haut.

Un point double biplanaire ordinaire est équivalent à un couple de courbes rationnelles de degré -2, ayant un point commun. Désignons par A_{i1}, A_{i2} le couple de courbes équivalant au $i^{ième}$ point double de Φ ($i = 1, 2, \ldots, 6$).

Les courbes Γ_1 rencontrent en un point chacune des courbes A_{11}, A_{21}, ..., A_{61}, mais ne rencontrent pas A_{12}, A_{22}, ..., A_{62}. Inversement, les courbes Γ_2 rencontrent A_{21}, A_{22}, ..., A_{62}, mais ne rencontrent pas A_{11}, A_{21}, ..., A_{61}.

Pour découvrir une relation fonctionnelle entre Γ et Γ_1, ou Γ et Γ_2, observons qu'à une section hyperplane C quelconque de F correspond, sur Φ, une courbe C^* découpée par une hypersurface cubique. En particulier, si C coïncide avec une section hyperplane de F trans-

formée d'une section hyperplane de Φ, C^* se réduit à 3Γ et l'hypersurface cubique à un hyperplan compté trois fois. Si, au contraire, C coïncide avec une nouvelle courbe C_1, C^* se réduit à une courbe $3\Gamma_1$ et l'hypersurface cubique oscule Φ en chaque point d'intersection. Il en résulte que sur Φ, les courbes 3Γ et $3\Gamma_1$ ne diffèrent que par une somme de courbes d'ordre o, $A_{11}, \ldots, A_{62}$.

En tenant compte de ce qui a été dit plus haut sur les points communs à Γ_1 et aux courbes $A_{11}, \ldots, A_{62}$, on trouve

$$3\Gamma_1 + 2(A_{11} + A_{21} + \ldots + A_{61}) + (A_{21} + A_{22} + \ldots + A_{62}) \equiv 3\Gamma.$$

De même, on a

$$3\Gamma_2 + (A_{11} + A_{21} + \ldots + A_{61}) + 2(A_{21} + A_{22} + \ldots + A_{62}) \equiv 3\Gamma.$$

56. Nous allons voir que l'existence des six points doubles et d'une hypersurface cubique, osculant Φ en chaque point d'intersection, est une condition suffisante.

Soient :

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_\pi) = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{\pi-2} = 0$$

les équations de Φ ;

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_\pi) = 0$$

l'équation d'une hypersurface cubique passant par les six points doubles biplanaires et osculant Φ en chaque point d'intersection.

Considérons la surface F′ définie par les équations

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{\pi-2} = 0, \qquad x_{\pi+1}^2 = f(x_1, \ldots, x_\pi).$$

L'hypersurface f osculant Φ en chaque point d'intersection, il n'y aura diramation qu'aux six points doubles de Φ et, par conséquent, la surface F′ existera effectivement. De plus, la courbe de diramation étant d'ordre zéro, de même que les courbes canonique et pluricanoniques de Φ, F′ aura des courbes canonique et pluricanoniques d'ordre zéro ; par suite, on a, pour F′,

$$p_g = P_4 = 1, \qquad p^{(1)} = 1.$$

D'autre part, on peut calculer l'invariant de Zeuthen-Segre de F′

en partant du faisceau correspondant à un faisceau de sections hyperplanes de Φ. Si S est la classe de Φ, on a $S = 6\pi$, car l'invariant de Zeuthen-Segre de Φ est égal à 20 et un point double biplanaire ordinaire abaisse la classe de trois unités. Dans un faisceau de courbes de F′ correspondant à un faisceau de sections hyperplanes de Φ, il y a six courbes ayant un point double correspondant aux sections hyperplanes passant par les points doubles biplanaires, et $S = 6\pi$ courbes ayant trois points doubles, correspondant aux hyperplans tangents à Φ. Le faisceau considéré ayant le degré $6\pi - 6$ et le genre $3\pi - 2$, l'invariant de Zeuthen-Segre I de F′ est

$$I = 6 + 18\pi - 6(\pi - 1) - 4(3\pi - 2) = 20.$$

Par suite, le genre arithmétique de F′ est

$$p_a = \frac{1}{12}(p^{(1)} + I - 9) = 1.$$

La surface F'_1 ayant les genres $p_a = P_4 = 1$, est de genres 1; donc

Pour qu'une surface de genres 1 *soit de rang* 3, *il faut et il suffit que :*

1° *La surface possède* 6 *points doubles biplanaires ordinaires;*

2° *Parmi les hypersurfaces cubiques passant par ces points doubles, il y en ait qui osculent la surface en chaque point d'intersection.*

57. Passons à l'étude d'une surface normale simple, de genres 1, de S_π, de rang 9 (nécessairement de seconde espèce). Une telle surface, Φ, possède 8 points de diramation qui sont des points doubles biplanaires ordinaires. Soit F une surface de genres 1 contenant une involution d'ordre 9, I_9, dont Φ est l'image. Désignons par $|\Gamma|$ le système des sections hyperplanes de Φ, par C_0 les courbes qui correspondent sur F aux courbes Γ, par T_1, T_2 deux transformations birationnelles cycliques de F en elle-même, de période 3, engendrant I_9. On sait que l'on a $T_1 T_2 = T_2 T_1$.

Le système $|C|$, contenant les C_0 comme courbes totales, est transformé en lui-même par T_1. Il contient trois systèmes $|C_{00}|$, $|C_1|$, $|C_2|$ de courbes invariantes pour T_1, car T_1 engendre sur F une involution I_9 de genres 1. $|C|$ étant de genre $9\pi - 8$, $|C_{00}|$, $|C_1|$, $|C_2|$ ont respecti-

vement les dimensions $3\pi - 2$, $3\pi - 4$, $3\pi - 4$, et $|C_{00}|$ est celui des trois systèmes dépourvu de points-base.

Le système $|C_{00}|$ est tranformé en lui-même par T_2, et cette transformation laisse invariantes les courbes de trois systèmes dont l'un est $|C_0|$. Les deux autres, que nous désignerons par $|C_{11}|$, $|C_{12}|$, ont la même dimension $\pi - 2$. Chacun de ces systèmes a pour points-base les 18 points de F invariants pour T_2, T_1T_2, $T_1^2T_2$, et en chacun de ces points, touche une des directions unies. Désignons par Γ_{11}, Γ_{12} les courbes de Φ qui correspondent respectivement aux courbes C_{11}, C_{12}. En répétant le même raisonnement que celui fait à propos des surfaces de rang 3, on voit que le long de Γ_{11} (ou de Γ_{12}), il y a une hypersurface cubique osculant Φ en chaque point d'intersection. Dans le cas actuel, ces hypersurfaces passent par 6 des 8 points doubles de Φ.

Désignons par A_{i1}, A_{i2} les deux courbes rationnelles de degré -2 qui équivalent au $i^{\text{ième}}$ point double de Φ ($i = 1, 2, \ldots, 8$). On déduit de ce que nous avons vu pour les surfaces de rang 3, sans difficulté, que l'on a

$$3\Gamma_{11} + 2(A_{31} + A_{41} + \ldots + A_{81}) + (A_{32} + \ldots + A_{82}) \equiv 3\Gamma.$$
$$3\Gamma_{12} + (A_{31} + \ldots\ldots + A_{81}) + 2(A_{32} + \ldots + A_{82}) \equiv 3\Gamma.$$

Il existe de même, sur Φ, trois couples de systèmes linéaires $|\Gamma_{21}|$, $|\Gamma_{22}|$; $|\Gamma_{31}|$, $|\Gamma_{32}|$; $|\Gamma_{41}|$, $|\Gamma_{42}|$, de genre $\pi - 2$, analogues à $|\Gamma_{11}|$, $|\Gamma_{12}|$. On a, par exemple,

$$3\Gamma_{21} + 2(A_{11} + A_{21} + A_{51} + \ldots + A_{81}) + (A_{21} + A_{22} + A_{52} + \ldots + A_{82}) \equiv 3\Gamma,$$

etc.

Inversement, on montre que l'existence de deux hypersurfaces cubiques osculant Φ en chaque point d'intersection et passant chacune par 6 des 8 points doubles (chacun de ceux-ci étant au moins sur une des hypersurfaces) suffit à caractériser l'existence d'une surface birationnellement identique à F. L'analogie de la démonstration de ce fait avec les démonstrations faites plus haut nous a conduit à énoncer simplement le théorème :

Les conditions nécessaires et suffisantes, pour qu'une surface de genres 1 *soit de rang* 9 *et de seconde espèce, sont :*

1° *Que la surface possède* 8 *points doubles biplanaires ordinaires;*

2° *Que l'on puisse partager les* 8 *points en deux groupes de* 6, *et que parmi les hypersurfaces cubiques passant par les points de chaque groupe, il y en ait quelques-unes osculant la surface en chaque point d'intersection.*

CHAPITRE IX.

SURFACES DE RANG 4 ET DE RANG 6, DE PREMIÈRE ESPÈCE.

58. Soit Φ une surface d'ordre $2\pi - 2$, de genres 1, simple, normale, de S_π, de rang 4 et de première espèce. Elle possède par suite 4 points doubles biplanaires de deuxième espèce (¹) et 2 points doubles coniques. Les premiers sont des points de diramation quadruple, les seconds des points de diramation ordinaire.

Soit F une surface de genres 1 possédant une involution I_4 d'ordre 4 dont Φ est l'image, et soit T la transformation birationnelle engendrant cette involution (cyclique puisque de première espèce). L'involution I_4 possède quatre points de coïncidence quadruple, P_1, P_2, P_3, P_4, et deux couples de points de coïncidence double Q_{11}, Q_{12} et Q_{21}, Q_{22}.

Aux sections hyperplanes Γ de Φ correspondent, sur F, des courbes totales d'un système $|C|$, de degré $8\pi - 8$ et de genre et dimension $4\pi - 3$.

La transformation T^2 engendre sur F une involution d'ordre 2 et de genres 1, possédant les 8 points de coïncidence P_1, P_2, P_3, P_4, Q_{11}, Q_{12}, Q_{21}, Q_{22}. Nous pouvons construire une surface Φ^*, simple et normale, d'ordre $4\pi - 4$, à sections hyperplanes de genre $2\pi - 1$, dans un espace linéaire à $2\pi - 1$ dimensions, image de cette involution et telle qu'à ses sections hyperplanes Γ^* correspondent des courbes de $|C|$. Φ^* possède 8 points doubles coniques P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^*, Q_{11}^*, Q_{12}^*, Q_{21}^*, Q_{22}^* correspondant aux points de coïncidence. Il existe un second système $|\Gamma_1^*|$, de genre $2\pi - 3$, sur Φ^*. Ainsi qu'on l'a vu au Chapitre VII, les courbes de ce système rencontrent en un point

(¹) Un point double biplanaire d'espèce 2 est formé d'un point double biplanaire auquel est infiniment voisin successif un point double conique (*voir* première Partie, p. 398, note au bas de la page).

chacune des courbes rationnelles de degré -2 équivalentes aux points $P_1^*, \ldots, Q_{22}^*$.

A l'involution I_4 correspond, sur la surface Φ^*, une involution d'ordre 2, engendrée par une transformation birationnelle θ, et donc Φ est l'image. Les points de coïncidence de cette involution correspondent évidemment aux points de coïncidence quadruple de I_4. Or, nous savons qu'il existe deux de ces points dans le domaine de chacun des points P_1, P_2, P_3, P_4. On en conclut que θ transforme en elle-même la courbe rationnelle de degré -2, équivalente à P_1, par exemple, et qu'elle laisse invariants deux points de cette courbe. Les 8 points ainsi obtenus sont les points de coïncidence de l'involution d'ordre 2 existant sur Φ^*. Par contre, θ transforme Q_{11} en Q_{12} et Q_{21} en Q_{22}.

Le système $|C|$ étant invariant pour T, θ transforme en eux-mêmes les systèmes $|\Gamma^*|$ et $|\Gamma_1^*|$.

Rapportons projectivement les courbes Γ_1^* aux hyperplans d'un espace à $2\pi - 3$ dimensions. A Φ^* correspond une surface Φ_1^* sur laquelle se trouvent 8 droites $p_1, p_2, \ldots, q_{22}$ correspondant aux point $P_1^*, P_2^*, \ldots, Q_{22}^*$. A θ correspond une transformation homographique θ_1. Il est maintenant facile de voir que, dans le système des sections hyperplanes de Φ_1^*, il y a deux systèmes de courbes invariantes pour θ_1. D'après ce que nous venons de voir, il y a, sur chacune des droites p_1, p_2, p_3, p_4, deux points invariants pour θ_1. Les sections hyperplanes invariantes pour θ_1 doivent passer par un de ces points. Si donc on se reporte à la surface Φ^*, on voit qu'il existe, dans $|\Gamma_1^*|$, deux systèmes linéaires $|\Gamma_{11}^*|, |\Gamma_{12}^*|$, de courbes invariantes pour θ. Ces courbes passent simplement par les 8 points doubles, mais dans les cônes tangents à chacun des points $P_1^*, \ldots, P_4^*$, il y a deux génératrices invariantes pour θ. Les courbes Γ_{11}^* touchent l'une de ces génératrices, les courbes Γ_{12}^* l'autre.

Aux systèmes $|\Gamma_{11}^*|, |\Gamma_{12}^*|$ correspondent, sur Φ, deux systèmes que nous désignerons respectivement par $|\Gamma_{11}|, |\Gamma_{12}|$. Il résulte de ce qui précède que chaque courbe Γ_{11} (ou Γ_{12}) passe simplement par les points doubles de Φ; les courbes Γ_{11} touchent un des points tangents, les courbes Γ_{12} l'autre plan tangent, en chacun des points doubles biplanaires d'espèce 4. De plus, on voit facilement que les systèmes $|\Gamma_{11}|, |\Gamma_{12}|$ ont tous deux la même dimension $\pi - 2$.

Reprenons la surface Φ^*. Dans le système $|\Gamma^*|$, il y a deux systèmes de courbes invariantes pour θ; l'un correspond à $|\Gamma|$, les courbes de l'autre passent par les huit points invariants pour θ, et les hyperplans qui les découpent passent donc par les points doubles P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^*. Il en résulte que chacune de ces courbes se compose d'une courbe variable Γ_0^* et des quatre courbes rationnelles équivalentes aux points P_1^*, ..., P_4^*; ces quatre courbes ont deux points communs, variables, avec Γ_0^*. Au système linéaire $|\Gamma_0^*|$ correspond, sur Φ, un système $|\Gamma|$ de genre $\pi - 2$, car $|\Gamma_0^*|$ a la dimension $\pi - 2$, comme on le voit facilement d'après la théorie des homographies involutives. Les courbes Γ_0 ont un point double en chacun des points doubles biplanaires de Φ.

Si une surface normale, simple, de S_π, *est de rang* 4 *et de première espèce, il existe sur cette surface trois systèmes linéaires de genre* $\pi - 2$. *Les courbes de deux de ces systèmes passent simplement par les points doubles et touchent un des plans tangents en chaque point biplanaire. Les courbes de l'autre système ont un point double en chaque point biplanaire.*

59. Soient:

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_\pi) = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{\pi-2} = 0$$

les équations de la surface Φ (en coordonnées non homogènes):

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_\pi) = 0$$

l'équation d'une hypersurface d'ordre 4, ayant un contact du quatrième ordre avec Φ le long d'une courbe Γ_{14}.

Considérons la surface F représentée par les équations

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{\pi-2} = 0, \qquad x_{\pi+1}^4 = f(x_1, \ldots, x_\pi),$$

dans un espace linéaire à $\pi + 1$ dimensions. Nous allons démontrer que cette surface est de genres 1.

Observons tout d'abord que la surface F existe, car il y a diramation dans le domaine des 6 points doubles de Φ. De plus, comme les courbes de diramation sont infiniment petites, les courbes canonique

et pluricanoniques de F′ sont, comme celles de Φ, d'ordre zéro et l'on a, pour F′,

$$p_g = P_2 = \ldots P_i = \ldots = p^{(1)} = 1.$$

D'autre part, on peut calculer l'invariant de Zeuthen-Segre de F′ en se servant d'un faisceau de courbes transformé d'un faisceau de sections hyperplanes de Φ, comme nous l'avons déjà fait plusieurs fois. On trouve $I = 20$, et par conséquent $p_a = 1$, ce qui démontre le théorème :

Pour qu'une surface simple, normale, de genres 1, *soit de rang* 4 *et de première espèce, il faut et il suffit que :*

1° *La surface possède quatre points doubles biplanaires d'espèce* 2 *et deux points doubles coniques ;*

2° *Parmi les hypersurfaces d'ordre* 4 *passant par ces six points doubles, il en existe qui aient un contact quartiponctuel avec la surface en chaque point d'intersection.*

Remarquons, avant de passer aux surfaces de rang 6, que le long d'une courbe Γ_0 il y a une hyperquadrique touchant la surface Φ. L'existence d'une telle hyperquadrique entraîne celle d'une surface birationnellement identique à Φ*.

60. L'étude des systèmes de courbes tracées sur une surface simple, normale, de genres 1 et de rang 6, Φ, de S_π, se fait d'une manière analogue. Nous ne la reprendrons pas en détail et nous bornerons à donner les résultats. Rappelons que la surface Φ possède deux points de diramation d'ordre 6 qui sont deux points doubles biplanaires de 4e espèce (formés de trois points doubles infiniment voisins successifs, le dernier étant conique), deux points de diramation cubique qui sont deux points doubles biplanaires ordinaires, deux points de diramation double qui sont des points doubles coniques.

Si une surface Φ normale, simple, de S_π, est de rang 6, il existe sur cette surface cinq systèmes linéaires de genre $\pi - 2$. Les courbes de deux de ces systèmes passent simplement par chacun des six points doubles de la surface. Les courbes de deux des autres systèmes

passent par les quatre points doubles biplanaires. Les courbes du dernier système passent par les deux points doubles biplanaires de 4^e espèce et par les points doubles coniques.

Le long de chaque courbe de chacun des deux premiers systèmes, il y a une hypersurface d'ordre 6 ayant un contact du 6^e ordre avec la surface. Le long de chaque courbe des 3^e et 4^e systèmes, il y a une hypersurface cubique osculant la surface Φ. Enfin, le long des courbes du dernier système, il y a une hyperquadrique touchant la surface Φ.

61. Soient encore :

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_\pi) = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{\pi-2} = 0$$

les équations de la surface Φ ;

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_\pi) = 0$$

l'équation d'une hypersurface d'ordre 6 ayant un contact du sixième ordre avec la surface Φ le long d'une courbe (d'ordre $2\pi - 2$) passant par les six points doubles. Les équations

$$\varphi_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{\pi-2} = 0, \qquad x_{\pi+1}^6 = f(x_1, x_2, \ldots, x_\pi)$$

représentent une surface de genres 1. On le démontre en suivant la même voie que précédemment.

Pour qu'une surface simple, normale, de genres 1, *soit de rang* 6, *il faut et il suffit que :*

1° *La surface possède six points doubles : deux points doubles biplanaires de* 1^e *espèce, deux points doubles biplanaires ordinaires et deux points doubles coniques ;*

2° *Parmi les hypersurfaces d'ordre* 6 *passant par les six points doubles, il en existe qui ont un contact d'ordre* 6 *en chaque point d'intersection.*

(*A suivre.*)

SUR

L'INTÉGRATION DES FONCTIONS NON BORNÉES

ET SUR

LES DÉFINITIONS CONSTRUCTIVES

PAR M. ÉMILE BOREL.

M. Lebesgue vient de publier (¹) un Mémoire « à l'occasion de remarques formulées par M. Borel sur les définitions qu'il appelle *définitions constructives* ». Dans ce Mémoire assez étendu j'ai cru distinguer trois idées essentielles : critique mathématique de ma définition de l'intégrale des fonctions non bornées, discussion méthodologique et pédagogique sur les définitions constructives, revendications de priorité. J'examinerai successivement ces trois points; je n'aurais pas, selon mes habitudes, discuté les questions de priorité, si je n'étais mis en cause d'une manière inusitée qui m'oblige à prouver par des textes que, dans mes publications et en particulier dans ma Notice de 1912, j'ai pleinement rendu justice à M. Lebesgue et ai été très loin d'exagérer la part qui me revient.

Je ne ferai état dans ce Mémoire que de mes résultats entièrement publiés; je réserve pour des publications ultérieures les développements inédits que j'avais annoncés avant la guerre et dont la rédaction et la publication se sont trouvées retardées.

(¹) *Annales de l'École Normale*, juin à août 1918 (fascicules parus en avril 1919).

I. — L'intégration des fonctions non bornées.

Dans ma Notice (p. 29 et 30), je renvoie aux Notes suivantes, désignées par les numéros 38, 39, 53 :

38. *Sur la définition de l'intégrale définie* (*Comptes rendus*, t. CL, p. 375).

39. *Sur une condition générale d'intégrabilité* (*Ibid.*, p. 508).

53. *Le calcul des intégrales définies* (*Journal de Mathématiques*, 1912).

Les énoncés donnés par M. Lebesgue aux pages 209 et 215 de son Mémoire sont contredits par un exemple qui figure dans la Note 39; je vais développer la démonstration de l'existence de l'intégrale, en reprenant cet exemple.

Soient a_n les nombres rationnels compris entre 0 et 1 rangés en série simple d'après l'un des procédés connus; on pose

$$f(x) = \Sigma e^{-n} |x - a_n|^{-\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

Cette égalité définit la fonction $f(x)$ lorsque la série converge; lorsqu'elle diverge ou qu'un des termes est infini, la fonction $f(x)$ est infinie. L'ensemble des infinis de $f(x)$ a la puissance du continu (1). Pour montrer que la fonction $f(x)$ est intégrable par ma méthode, « *la seule précaution à prendre est la suivante : il ne suffit pas que l'ensemble des intervalles d'exclusion tende vers zéro lorsqu'on fait varier l'ensemble de ces intervalles; il faut encore avoir soin, dans chaque choix particulier que l'on fait de ces intervalles, d'assujettir leur décroissance asymptotique à ne pas être trop rapide* (2) ». Sans cette précaution, en effet, il pourrait se trouver dans les parties non exclues des points de divergence de la série, c'est-à-dire des infinis de $f(x)$; la définition

(1) *Voir*, par exemple, ma Note *Sur les ensembles de mesure nulle* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1913).

(2) *Comptes rendus*, t. CL, p. 510.

serait donc inexistante, et point ne serait besoin de longs développements pour démontrer qu'elle ne s'applique pas.

Nous allons prendre, comme il est indiqué dans la Note citée, l'intervalle d'exclusion relatif à a_n égal à $\frac{\varepsilon}{n^2}$. A chaque valeur de ε faisons correspondre un nombre m tel que l'on ait

$$\sum_{m+1}^{\infty} e^{-n} n^2 < \varepsilon^2, \tag{2}$$

$$\sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \varepsilon^2. \tag{3}$$

Posons

$$f(x) = \varphi_m(x) + \psi_m(x), \tag{4}$$

en désignant par φ_m la somme des m premiers termes de la série et par ψ_m le reste. Nous devons, en laissant ε fixe, former les sommes de Riemann relatives à $f(x)$, en tenant compte de l'exclusion des intervalles $\frac{\varepsilon}{n^2}$; ces sommes peuvent être décomposées en deux parties, l'une relative à φ_m et l'autre relative à ψ_m. La partie relative à ψ_m est infiniment petite avec ε d'après l'inégalité (2); quant à la partie relative à φ_m, elle converge lorsque les intervalles de Riemann tendent vers zéro, à condition de faire abstraction des intervalles d'exclusion relatifs aux points singuliers de ψ_m; mais, d'après l'inégalité (3), la modification introduite du fait de ces intervalles est également infiniment petite avec ε. Ma définition de l'intégrale conduit donc à lui attribuer une valeur égale à la somme (convergente) des intégrales des termes de la série.

La démonstration s'appliquerait sans modification appréciable à une fonction telle que

$$F(x) = \Sigma e^{-n} \theta(x - a_n) \tag{5}$$

avec

$$\theta(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}, \tag{6}$$

dont la valeur absolue n'est pas intégrable. Il y aurait lieu simplement ici de remarquer, ce qui était inutile dans le cas précédent, que l'on peut, quel que soit m, choisir d'une manière aussi irrégulière qu'on le désire les intervalles d'exclusion relatifs aux m premiers points singuliers, la décroissance asymptotique seule restant assujettie à des restrictions analogues aux précédentes. Cette remarque revient à constater, par le calcul des sommes de Riemann, l'intégrabilité au sens de Riemann de chaque terme de la série, considéré isolément.

Comme je l'indique à la fin de mon Mémoire de 1912, c'est pour résoudre des questions précises se rattachant à mes recherches sur les fonctions monogènes non analytiques, que j'avais été amené à réfléchir à l'intégration des fonctions non bornées; toute ma rédaction a été influencée par la pensée de cette application; en outre, comme je l'indique à la fin du Mémoire, j'étais arrivé, entre temps, à exposer les résultats essentiels de la théorie des fonctions monogènes non analytiques en évitant, au moins formellement, l'emploi de fonctions non bornées (1); j'y utilise, par contre, des chemins d'intégration d'une nature discontinue très particulière. Par l'emploi de tels chemins dans le plan complexe, on démontrerait aisément qu'une fonction telle que $F(x)$ est la dérivée de son intégrale définie et que la valeur que j'attribue à son intégrale peut s'exprimer au moyen de la fonction primitive. L'intégration terme à terme d'une telle fonction me paraît exiger des procédés de raisonnement, sinon identiques, du moins équivalents à ceux que j'ai employés (2). Je n'aperçois d'ailleurs pas d'applications simples d'un tel résultat; c'est pourquoi, dans ma Notice de 1912, je n'ai pas consacré plus de quatre lignes à l'intégration des fonctions non bornées. C'est pourquoi également je n'ai pas jusqu'ici développé la démonstration de l'existence de l'inté-

(1) *Voir* la Note I de mes *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe*. Cette Note renferme une partie des résultats annoncés en 1912 comme devant paraître dans un Mémoire des *Acta mathematica*, Mémoire qui n'a pas été rédigé.

(2) Si l'on remplace un intervalle d'exclusion par le demi-cercle situé au-dessus de Ox, décrit sur cet intervalle comme diamètre, la valeur de l'intégrale dans le plan complexe est modifiée de πe^{-n}, e^{-n} étant le résidu relatif à cet intervalle. On peut ainsi démontrer que la fonction (5) est la dérivée de son intégrale indéfinie, car cette propriété est évidente si on limite la série à un nombre fini de termes et les demi-cercles, correspondant aux termes négligés, introduisent une erreur inférieure à $\pi\varepsilon$, ε étant arbitrairement petit.

grale, d'après ma définition, pour une fonction telle que (5); car un tel résultat, si l'on n'en donne pas d'applications, n'a pas à mes yeux grand intérêt.

M. Lebesgue trouve arbitraire la définition que j'ai donnée; elle s'imposait à moi par la nature du problème : une fonction ne peut être intégrable que si l'ensemble de ses infinis est de mesure nulle; car, le produit de l'infini par zéro étant indéterminé, on peut espérer que ce produit a une valeur finie, tandis que le produit de l'infini par un nombre fini ne peut être qu'infini; or, tout ensemble de mesure nulle fait partie d'un ensemble régulier (1), défini par une infinité dénombrable de points fondamentaux et des intervalles d'exclusion qui décroissent suivant une certaine loi asymptotique. Si l'on se place au point de vue d'une fonction donnée *a priori*, abstraitement, et non d'une manière constructive, on peut se demander si les points fondamentaux sont bien déterminés, c'est-à-dire si un choix particulier de points fondamentaux se distingue des autres choix possibles par des propriétés objectives, comme c'est le cas pour les fonctions que je considère. C'est là une question dont l'intérêt est peut être grand pour les mathématiciens qui croient à l'intérêt de l'étude des fonctions données arbitrairement, mais dont je n'aperçois en ce moment aucune application pratique possible (2).

M. Lebesgue signale un défaut d'homogénéité dans mon Mémoire de 1912; ce défaut est réel, mais je voudrais en préciser, à mon sens, la nature : tandis que le debut du Mémoire (jusqu'au milieu de la seconde Partie) est rédigé comme un Ouvrage didactique, la fin a plutôt le caractère de Notes préliminaires destinées à être développées ultérieurement. J'ai eu tort de ne pas séparer ces deux Parties en deux Mémoires distincts; l'une et l'autre y eussent gagné.

II. — Sur les définitions constructives.

Depuis tantôt vingt-cinq ans, mes idées sur les définitions construc-

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, 1913 (*loc. cit.*)

(2) Dans le cas de certains ensembles de mesure nulle à définition asymptotique, le choix des points fondamentaux est arbitraire dans de très larges conditions; c'est là un

tives et les questions connexes ont subi une évolution que je n'ai pas dissimulée : j'ai cru devoir, au contraire, y attirer l'attention dans la mesure où il m'a semblé qu'elle pouvait présenter quelque intérêt scientifique (¹). Mais, depuis une dizaine d'années, ma doctrine est restée stable et je croyais l'avoir exposée d'une manière claire; les interrogations que pose M. Lebesgue me prouvent que j'y suis insuffisamment parvenu; je vais donc essayer d'être plus clair; la principale difficulté que j'y rencontre est que certains points me paraissent tellement évidents que je me fais scrupule d'y insister; malheureusement l'évidence est parfois subjective.

C'est un fait d'expérience que l'infini énumérable est le seul infini sur lequel tous les mathématiciens sont pratiquement toujours d'accord (j'entends lorsqu'ils font des mathématiques). Certaines suites énumérables particulières peuvent être *données* soit avec une précision absolue (suite des carrés des nombres entiers, suite des nombres premiers), soit avec une approximation indéfinie (a_n peut être calculé à ε près, quels que soient n et ε). On peut, d'autre part, considérer des *classes* de suites énumérables, telles que l'ensemble des fractions continues, ou l'ensemble des séries de Taylor de rayon de convergence donné, et faire sur ces classes des raisonnements mathématiques. Ces raisonnements sont, ou bien des raisonnements généraux, tenant lieu de raisonnements particuliers sur chaque individu de la classe qui pourra être ultérieurement défini; l'exemple le plus simple en est une formule telle que $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, ou bien des raisonnements de probabilités, tels que ceux dont j'ai donné des exemples dans mon Mémoire : *Sur les Probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques;* mais je ne vois pas comment on pourrait prétendre raisonner sur un individu déterminé, mais non *défini;* il y a là une contradiction dans les termes sur laquelle j'ai plusieurs fois insisté; j'avais cru jusqu'ici que M. Hadamard était le seul géomètre français qui ne fût pas de mon avis sur ce point; je m'aperçois que les idées de M. Lebesgue ont subi une évolution en

point que j'étudie dans un Mémoire sur les ensembles de mesure nulle qui est en cours d'impression dans le *Bulletin de la Société mathématique.*

(¹) *Voir* notamment ma *Notice* de 1912, p. 14, et la *Préface* de la deuxième édition de mes *Leçons sur la théorie des fonctions* (1914).

sens contraire de la mienne et que, tandis que, en 1905 (1), il était en gros d'accord avec moi contre M. Hadamard, il n'est plus d'accord avec moi aujourd'hui; mais je n'oserais pas affirmer qu'il est d'accord avec M. Hadamard.

Si j'ai mentionné cette divergence de points de vue, bien qu'elle soit d'un intérêt surtout théorique (car, en définitive, ni M. Lebesgue, ni M. Hadamard, ni M. Zermelo, n'ont jamais considéré *un* être mathématique dont la définition complète eût exigé un nombre infini de mots), c'est qu'elle ne me paraît pas être sans rapport avec l'attitude pratique que prennent les mathématiciens dans l'orientation de leurs recherches.

Les uns s'intéressent surtout aux questions générales, d'autres aux problèmes particuliers; certains, enfin, voient dans les méthodes générales, non une fin en soi, mais un moyen pour résoudre quelques questions particulières. Pour nous borner à la théorie des fonctions, l'étude des fonctions particulières et celle des théories générales ne doivent être négligées ni l'une ni l'autre; mais on peut cultiver les théories générales pour elles-mêmes ou en vue d'applications particulières. Il est évident que celui même qui cultive les théories générales en elles-mêmes ne peut espérer les appliquer à une fonction qui ne sera jamais construite; en ce sens, M. Lebesgue a théoriquement raison quand il dit que tous utilisent plus ou moins la méthode constructive; mais la différence pratique entre les uns et les autres me paraît néanmoins très grande. Ceux que j'appellerais volontiers les adeptes de la méthode constructive s'attachent spécialement à l'étude des fonctions construites par certaines méthodes qu'ils regardent comme simples et naturelles; c'est à ces fonctions et à ces procédés de construction qu'ils adaptent leurs démonstrations. Si, par la suite, on se trouve amené à considérer des procédés de construction nouveaux, ils seront amenés à compléter ou même à modifier leurs théories; c'est là, pour eux, un inconvénient réel et inévitable, auquel échappent les géomètres de l'école dans laquelle paraît se ranger M. Lebesgue. Par contre, les démonstrations et les méthodes à objectif plus limité sont

(1) *Voir* les *Cinq lettres sur la théorie des ensembles* (*Bulletin de la Société mathématique*, 1905).

généralement plus simples et mieux adaptées à leur objet, plus aisément utilisables dans les applications; il arrive, d'autre part, le plus souvent que, lorsqu'on veut en arriver effectivement à l'application numérique, les méthodes en apparence plus générales de l'école non constructive exigent un effort d'adaptation équivalent à celui qui fut nécessaire pour la méthode constructive.

Enfin, si la méthode constructive a été judicieusement appliquée, c'est-à-dire si les procédés de construction considérés comme simples et naturels ont été bien choisis, il arrivera souvent que, dans la pratique, les résultats obtenus auront une généralité aussi grande qu'il est souhaitable, au moins pendant de nombreuses années. Comme exemples de choix qui me paraissent avoir été heureux, je me permettrai de citer les résultats que j'ai obtenus sur les fonctions entières à croissance régulière et sur la sommation des séries divergentes par la méthode exponentielle. Dans l'un et dans l'autre cas, la catégorie d'êtres analytiques auxquels s'appliquent ces résultats est infiniment restreinte, si l'on se place au point de vue abstrait. En fait, les seules fonctions entières nouvelles découvertes depuis vingt ans, à savoir les fonctions entières définies par les équations différentielles de M. Painlevé, sont à croissance régulière, et la méthode de sommation exponentielle a vu le champ de ses applications s'accroître beaucoup en ces dernières années; tout récemment encore, M. Nörlund est arrivé, par des formules qui en dérivent, à des résultats de grande importance dans la théorie des équations aux différences finies.

Une théorie de la mesure et de l'intégration qui s'appliquerait aux fonctions que M. Baire appelle « de classe finie » et aux ensembles correspondants serait, dans la pratique, très suffisante pour l'enseignement élémentaire et même pour la plupart des chercheurs. C'est cette théorie que j'ai voulu édifier dans mon Mémoire de 1912; j'y traite des cas plus généraux, mais j'indique (p. 178) que les démonstrations sont très notablement simplifiées lorsqu'on introduit ces restrictions; il m'avait paru inutile, pour éviter des redites, de développer explicitement ces démonstrations simplifiées, elles sont aisées à rétablir. Cette exposition didactique me paraît devoir être, comme je le dis dans la Préface de la deuxième édition de mes *Leçons sur la théorie des fonctions*, « une introduction à l'étude des belles recherches

de M. Lebesgue ». Ceux-là seuls qui n'ont jamais essayé de lire un Mémoire ou un Livre de M. Lebesgue penseront qu'une telle introduction pouvait être superflue. Je ne prétends d'ailleurs pas être arrivé du premier coup à la forme didactique qui deviendra classique et pourra prendre place dans les Cours élémentaires de calcul différentiel et intégral; je crois du moins que mon Mémoire contribuera utilement à la simplification sans laquelle une théorie neuve ne devient pas classique.

Il ne m'est pas possible de *prouver* que mon exposition est plus simple et plus élémentaire que celle qui se trouve dans les publications antérieures de M. Lebesgue; je ne puis que m'en rapporter au jugement de ceux qui liront l'une et l'autre; je crois que la plupart d'entre eux seront sensibles aux simplifications qui résultent de l'emploi des domaines que j'ai appelés *élémentaires* (rectangles dans le cas de deux dimensions) et *simples* (nombre limité de domaines élémentaires) et aussi du fait que, en n'opérant que sur des polynomes, on n'a à considérer que des domaines *algébriques* pour lesquels de nombreuses complications *a priori* possibles se trouvent exclues.

M. Lebesgue reproche à ma définition de ne rien nous apprendre sur les relations entre l'intégrale et la fonction intégrée; cela signifie, si je ne me trompe, que je n'ai pas traité le problème général de la recherche des fonctions primitives: je m'explique sur ce point à la page 198 de mon Mémoire, où je renvoie aux travaux de M. Lebesgue et à ceux de M. Denjoy. Comme je l'indique (p. 199), la propriété fondamentale de l'intégrale est, à mes yeux, de donner la *valeur moyenne* d'une fonction dans un domaine ou sur une ligne; cette interprétation d'une intégrale comme une valeur moyenne fut celle des fondateurs du calcul intégral; elle est à la base des plus importants travaux de Cauchy; depuis, les divers théorèmes de la moyenne et leurs généralisations n'ont pas cessé d'être parmi les principales applications du calcul intégral. En particulier, c'est comme une valeur moyenne que se présente en général l'intégrale définie dans les applications à la Mécanique et à la Physique mathématique. Sans méconnaître l'importance du point de vue qui définit l'intégration comme l'opération inverse de la dérivation, et sans mésestimer les profondes recherches par lesquelles M. Lebesgue et M. Denjoy sont arrivés à résoudre dans tous les cas le problème

inverse de la dérivation, je continue à penser que les propriétés les plus importantes de l'intégrale définie sont celles qui se rattachent à la notion élémentaire de moyenne arithmetique; c'est à ces propriétés que conduit directement le mode d'exposition que j'ai adopté. Il n'y a aucune difficulté, dans les cas simples, à rattacher l'intégrale ainsi définie aux fonctions primitives; si l'on veut arriver à traiter dans tous ses détails et toutes ses complications le problème général de la recherche des fonctions primitives, il est vraisemblable qu'on ne pourra pas échapper à des difficultés équivalentes à celles qu'ont surmontées M. Lebesgue et M. Denjoy.

M. Lebesgue reproche enfin à mon mode d'exposition de ne pas s'appliquer aux ensembles qui sont mesurables sans être bien définis; il me reproche d'avoir partagé son erreur en ce qui concerne la possibilité de définir des ensembles qui ne soient pas mesurables B, d'après sa terminologie. Il déclare (page 198 de son Mémoire) qu'il a fait à ce sujet un raisonnement « grossièrement erroné »; cela prouve que tout le monde peut se tromper et j'aurais mauvaise grâce à ne pas reconnaître également mon erreur; je n'avais pas prévu les résultats obtenus en 1917 par MM. Souslin et Lusin; si je les avais prévus, j'aurais rédigé d'une manière légèrement différente quelques phrases de mon Mémoire. Mais, contrairement à ce que paraît penser M. Lebesgue, je n'aurais pas cessé de croire qu'il y avait un intérêt particulier à traiter à part les ensembles mesurables B, du moment qu'on peut les traiter d'une manière plus simple, car presque tous les ensembles que l'on rencontrera rentrent dans cette catégorie. C'est ainsi que la découverte de fonctions continues dépourvues de dérivées n'empêche pas l'étude des fonctions continues pourvues de dérivées de tenir une grande place dans les cours d'analyse. De même, en démontrant l'existence de fonctions monogènes non analytiques, je n'ai jamais pensé que la théorie des fonctions monogènes analytiques cesserait de devoir être enseignée et étudiée.

C'est ainsi qu'il faut, à mon avis, comprendre l'emploi de la méthode constructive. Pour reprendre comme exemple ma théorie de l'intégration des fonctions non bornées, je l'ai construite, comme je l'ai indiqué, ayant en vue certaines catégories de fonctions bien déterminées, dont j'avais besoin pour un but spécial; je crois que son champ

d'application est notablement plus étendu; mais je ne pense pas qu'elle perdrait nécessairement tout intérêt si l'on arrivait à construire une catégorie spéciale de fonctions auxquelles elle ne s'appliquerait pas. S'il était nécessaire d'intégrer ces fonctions, on chercherait à bâtir pour leur intégrale une définition, en partant du procédé même par lequel elles auraient été construites. De même, si l'on découvre des fonctions entières ayant un mode de croissance différent de celui que j'ai appelé régulier, il sera vraisemblablement possible de construire pour elles une théorie analogue à celle que j'ai établie pour les fonctions à croissance régulière.

On peut juger que mon point de vue est d'un empirisme un peu méprisable. Il serait certainement plus noble de traiter d'un seul coup tous les problèmes et toutes les questions. Malheureusement, même lorsqu'on peut énoncer des résultats généraux, les difficultés particulières se présentent dès qu'on veut effectivement en arriver au détail des applications. Cela tient, au fond, à ce que, dès qu'on veut approfondir une question analytique quelconque, on se trouve très rapidement arrêté par la considération du transfini. Cette difficulté se présente dans la notion en apparence la plus élémentaire, dès qu'on quitte le domaine de l'algèbre, la notion du nombre irrationnel quelconque.

J'ai déjà indiqué en plusieurs occasions comment l'introduction d'un seul nombre irrationnel pouvait renfermer en germe les difficultés analytiques les plus compliquées; de tels résultats ont été parfois interprétés comme tendant à prouver qu'on ne peut pas écarter ces difficultés (1); ils devraient plutôt mettre en garde contre cette idée trop répandue, qu'on sait ce que c'est qu'un nombre irrationnel *quelconque*. En réalité, nous ne connaissons que ceux des nombres irrationnels que nous savons *construire* par des procédés déterminés et, dans toute recherche où interviendra la nature arithmétique de ces nombres, il nous faudra limiter les procédés de construction que nous

(1) J'ai moi-même adopté autrefois cette interprétation, notamment dans un passage de ma Notice de 1901 qui a été, par inadvertance, reproduit sans modification dans ma Notice de 1912 (p. 67 et 68); si j'avais récrit ce passage à cette époque, au lieu de me borner à envoyer à l'imprimerie le texte de 1901, j'aurais modifié la rédaction dans le sens que j'indique ici.

aurons le droit d'utiliser, sous peine d'ouvrir la porte à des difficultés transfinies. Il en est de même pour les fonctions entières croissantes, pour les séries de Taylor, pour les séries trigonométriques, pour les fonctions orthogonales, etc. La complication apparente qu'il y a à suivre pas à pas les méthodes constructives et à leur adapter les théories et les procédés de calcul est en réalité une simplification lorsqu'on en vient aux applications. Je ne conteste pas, bien entendu, l'utilité des théories générales et des synthèses hardies; elles sont souvent très fécondes, assouplissent toujours l'esprit et le guident dans les applications de la méthode constructive; mais, à mes yeux, elles sont un moyen et non une fin en soi. J'ai exposé ce point de vue, il y a plus de vingt ans, à propos de la théorie des ensembles, dans la Préface de mes *Leçons sur la théorie des fonctions*; je n'ai pas varié sur ce point.

J'ai indiqué dans ma Notice de 1912 (p. 15) quel était le rôle essentiel que me paraissait devoir jouer, en théorie des fonctions, « l'étude systématique des procédés de construction à partir des éléments » ; c'est, en effet, à la construction des ensembles et des fonctions que j'applique l'expression de méthode constructive et non pas à la définition de la mesure ou de l'intégrale; je suis d'accord avec M. Lebesgue sur les avantages de la définition *descriptive* de la mesure que j'ai donnée en 1898; seulement, il me paraît désirable d'appliquer méthodiquement, comme je l'ai indiqué à cette date, et d'étendre, de proche en proche, cette définition à des ensembles construits successivement d'une manière de plus en plus compliquée à partir des ensembles élémentaires.

III. — Les questions de priorité.

J'examinerai successivement les réclamations de priorité de M. Lebesgue relatives à la théorie de la mesure et à la théorie de l'intégrale définie (1).

(1) M. Lebesgue dit, en un passage de son Mémoire, qu'il est *essentiel* d'observer que je dis théorie de l'intégrale au lieu de définition de l'intégrale. J'ai publié en 1910 une Note ayant pour titre : *La définition de l'intégrale définie*. Quelqu'un, qui est peut-être bien M. Lebesgue, me fit observer ce qu'il y avait d'apparemment bizarre en un tel titre :

Pour la mesure, M. Lebesgue n'a jamais contesté l'antériorité de mes travaux ni leur influence sur les siens; de mon côté, je n'ai jamais contesté l'importance de son apport; dans ma Notice de 1912 (p. 15), j'écrivais : « depuis, grâce aux travaux de nombreux géomètres français et étrangers, au premier rang desquels on doit citer M. Lebesgue, les applications de cette notion de mesure sont devenues très nombreuses ».

Il y a cependant deux points sur lesquels il me paraît utile d'apporter des précisions.

Voici le premier : M. Lebesgue paraît considérer comme entièrement négligeables les travaux que j'ai publiés sur la mesure des ensembles de 1901 à 1913 (1). Sinon, il ne s'étonnerait pas que la théorie de la mesure tienne plus de place dans ma Notice de 1912 que dans celle de 1901. Sans doute, aucun de ces travaux ne peut être complètement indépendant de ceux de M. Lebesgue, pas plus qu'aucun travail de M. Lebesgue sur ces matières ne peut être regardé comme complètement indépendant des miens; il en est toujours ainsi lorsque deux géomètres travaillent un même sujet pendant une même période,

---

définir une intégrale qui était déjà définie ! Ce reproche verbal me fut sensible et j'évitai le plus possible depuis d'y donner lieu : mais je suis, paraît-il, tombé de Charybde en Scylla.

(1) Voici la liste de ces travaux, pour le cas où elle intéresserait quelques lecteurs :

Un théorème sur les ensembles mesurables (*Comptes rendus*, t. CXXXVII); *Sur une propriété des ensembles fermés* (*Ibid.*, t. CXL); *Sur la définition de l'intégrale définie* et *Sur une condition générale d'intégrabilité* (*Ibid.*, t. CL); *La structure des ensembles de mesure nulle* (*Ibid.*, t. CLII); *La classification des ensembles de mesure nulle* (*Ibid.*, t. CLIV).

Contribution à l'analyse arithmétique du continu (*Journal de Mathématiques*, 1903); *Le calcul des intégrales définies* (*Ibid.*, 1912).

Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques (*Rendiconti del Circolo di Palermo*, t. 27).

Sur les principes de la théorie des ensembles (*Comptes rendus du Congrès de Rome*, 1908).

Remarques sur les ensembles de droites et de plans (*Bulletin de la Société mathématique*, 1903); *Remarques sur certaines questions de probabilité* (*Ibid.*, 1905); *Lettre sur les principes de la théorie des ensembles* (*Ibid.*, 1905); *Les ensembles de mesure nulle* (*Ibid.*, 1913).

Leçons sur les fonctions de variable réelle (Gauthier-Villars, 1905).

qu'ils ont de fréquentes conversations, se communiquent souvent leurs résultats ou les épreuves de leurs publications. Il est très difficile, après une conversation, surtout si elle est ancienne, de délimiter exactement l'apport de pensée de chacun. Cela est d'ailleurs inutile et vain. Aussi M. Lebesgue serait-il en droit de s'étonner si je revendiquais une part dans tous ses travaux, sous prétexte de cette interdépendance générale et vague; je puis, de mon côté, lui demander de ne pas revendiquer une part dans les miens. (Néanmoins, puisque M. Lebesgue met en cause mon Mémoire de 1912, je dois observer que la lecture de ma Note des *Comptes rendus* du 7 décembre 1903 et de celle de M. Lebesgue du 28 décembre 1903 précise ma part dans des énoncés qui jouent un rôle essentiel dans ce Mémoire.)

Voici maintenant le second point : M. Lebesgue paraît croire que l'une des raisons de l'importance que j'attache aux ensembles qu'il appelle mesurables B est que ce sont ceux que mes méthodes permettent de mesurer. J'ai indiqué quelles sont les raisons pour lesquelles les ensembles mesurables B me paraissent devoir être étudiés d'abord; dans l'enseignement élémentaire, je serais même d'avis qu'on se bornât à ceux de ces ensembles qui correspondent aux fonctions de classe finie de M. Baire; mais ceci n'a rien à voir avec les questions de priorité. Dans sa Thèse (p. 11), M. Lebesgue écrit : « Les ensembles que nous appelons mesurables sont donc ceux que les procédés de M. Borel permettent de mesurer à condition de tenir compte des remarques énoncées à la fin de la page 48 » (il s'agit de la page 48 des *Leçons sur la théorie des fonctions*, par Émile Borel). La phrase précédente ne se rapporte, d'après le contexte, qu'aux ensembles linéaires; le passage d'une à plusieurs dimensions est une de ces généralisations dont l'idée est banale, mais dont la réalisation est, suivant les cas, plus ou moins difficile (1). Voici ce qu'écrit à ce sujet M. Lebesgue dans sa Thèse : « Les considérations précédentes s'étendent sans peine aux ensembles dont les éléments sont les points d'un espace à plusieurs

(1) Dans mes *Leçons sur la théorie des fonctions*, je n'ai pas énoncé explicitement ni démontré l'extension au plan du théorème fondamental sur lequel est basée la théorie de la mesure; mais je l'ai énoncé implicitement et utilisé (p. 70); j'indique là que, si je ne développe pas l'étude des ensembles à deux dimensions, c'est parce que je n'en ai pas besoin pour les applications que j'ai en vue.

dimensions; nous nous bornerons au cas du plan. » Après avoir défini la mesure d'un carré et celle d'un triangle, il ajoute : « Il faut démontrer que *la mesure d'un triangle, somme de triangles n'empiétant pas les uns sur les autres, est la somme des mesures de ces triangles.* Les raisonnements exposés par M. Hadamard dans la Note D de sa *Géométrie élémentaire* prouvent qu'il en est bien ainsi si les triangles composants sont en nombre fini. Le cas où ils sont en nombre infini se traite par un raisonnement semblable à celui qui nous a été utile dans le cas des ensembles de points sur une droite (Borel, *Théorie des fonctions*, p. 42). » On voit que, tandis que M. Lebesgue ne jugeait pas superflu d'entrer dans des détails assez minutieux pour étendre au plan la propriété élémentaire d'après laquelle la mesure de la somme d'un nombre fini d'intervalles est égale à la somme des mesures, aucune explication ne lui paraît nécessaire pour étendre à deux dimensions le théorème correspondant où il s'agit d'une infinité dénombrable d'intervalles; on sait que c'est ce théorème qui est la base de ma théorie de la mesure.

J'aurais donc pu écrire dans ma Notice, en adoptant les termes mêmes de M. Lebesgue : « Les ensembles que M. Lebesgue appelle *mesurables* et qui sont les plus généraux que personne ait pu jusqu'ici mesurer sont ceux que mes procédés permettent de mesurer, en tenant compte de mes remarques de la page 48. » J'aurais d'ailleurs dû ajouter que M. Lebesgue a le premier mis en évidence toute l'étendue et toute la portée de ma définition; de même, certains géomètres ont montré que le champ d'application de ma théorie des séries divergentes était plus vaste que je ne l'avais soupçonné au début (1). Il n'est pas de joie plus grande pour un mathématicien que de voir ses théories vivre et se développer en dehors de lui; vis-à-vis de ceux qui lui auront procuré cette joie, il ne formulera jamais spontanément aucune réclamation de priorité.

Aussi ai-je été très surpris de constater que quelques lignes de ma Notice de 1912 avaient paru à M. Lebesgue être une réclamation de priorité tendant à m'attribuer une part dans sa définition de l'intégrale

Il prend la peine de vérifier que je n'ai jamais parlé de l'intégrale

(1) *Voir* notamment les travaux de MM. Hardy, Watson, Nörlund.

définie avant sa première Note; s'il m'avait communiqué ses doutes, j'aurais volontiers déclaré que, non seulement je n'avais rien écrit, mais que je n'avais jamais pensé à appliquer à l'intégration mes méthodes et définitions sur la mesure. Une telle déclaration est d'ailleurs superflue pour quiconque connaît la question; car si j'y avais pensé, c'est que j'aurais rapproché l'évaluation d'une intégrale de celle d'une aire plane; j'aurais donc donné une définition de l'intégrale équivalente à celle de M. Lebesgue et c'est mon nom qui y serait attaché, et non le sien. En fait, la publication de la première Note de M. Lebesgue sur l'intégrale m'a causé à la fois une très grande surprise et une très grande admiration que je n'ai jamais dissimulée. Je renvoie dans ma Notice à l'article que j'ai publié en 1909 dans la *Revue générale des Sciences* où je dis notamment :

« La définition de la mesure a été donnée par M. G. Cantor pour les ensembles fermés; son extension pure et simple aux ensembles non fermés conduisait à des résultats non satisfaisants; on a universellement adopté aujourd'hui la définition à laquelle j'ai été conduit par l'étude de problèmes particuliers et que M. Henri Lebesgue a systématisée.

» A cette théorie de la mesure, on peut rattacher la théorie nouvelle de l'intégration due à M. Henri Lebesgue. Nous y reviendrons tout à l'heure, mais je tiens à me hâter de dire que ce n'est point là une de ces généralisations faciles, conséquence nécessaire des travaux antérieurs, et qui doivent nécessairement être trouvées par quelqu'un. Cette théorie de l'intégration est une découverte capitale, dont l'importance dépasse de beaucoup la théorie de la mesure des ensembles; c'est un instrument analytique nouveau, mis à la disposition des géomètres par M. Lebesgue; nous indiquerons plus loin quelques-uns des progrès qui ont pu être réalisés jusqu'ici grâce à cet instrument; il y a tout lieu de croire que leur nombre et leur importance ne cesseront de croître, mais on peut dès à présent considérer cette découverte de M. Lebesgue comme le plus bel exemple de progrès importants réalisés dans la Théorie des fonctions. ..

» J'ai déjà fait allusion à la découverte capitale de M. Lebesgue concernant l'intégration; je voudrais essayer d'en indiquer le principe

et de faire pressentir l'influence considérable qu'elle exercera certainement sur le développement de nombreuses théories mathématiques. »

Il était, en effet, bien moins naturel de penser à l'intégrale à propos de la mesure que de penser aux ensembles à plusieurs dimensions à propos d'ensembles à une dimension. D'ailleurs, dans ma Notice, dans le passage même que cite M. Lebesgue, j'oppose *la théorie de l'intégrale de M. Lebesgue à ma définition de la mesure*; je ne me serais pas exprimé ainsi si j'avais revendiqué une part directe quelconque dans cette théorie. Par contre, j'écris : « Il n'est cependant pas inutile de faire observer que, si la théorie de l'intégrale de M. Lebesgue était loin d'être une conséquence évidente de ma théorie de la mesure, du moins entre ces deux théories, il n'y a pas de discontinuité logique, tandis qu'il y a un véritable fossé entre ma définition de la mesure et les définitions de la mesure et de l'intégrale qui étaient classiques et universellement admises, avec l'autorité des plus grands noms. »

J'avais déjà indiqué la même idée, sous une forme un peu différente, dans un Mémoire publié en 1903 (¹); après avoir exposé la méthode à laquelle j'ai donné le nom de méthode d'exclusion et l'avoir opposée à la méthode de division, j'ajoutais : « Il y a donc ici une différence essentielle entre les deux méthodes; j'ai indiqué, pour la première fois, cette différence à propos de la définition de la mesure des ensembles linéaires de points. M. Lebesgue a ensuite appliqué des principes analogues à la généralisation de la notion d'intégrale définie et est arrivé à des résultats fort remarquables. »

Ce parallélisme, entre *mesure* au sens de Cantor-Jordan et *intégrale* de Riemann d'une part et *mesure* au sens de Borel-Lebesgue et *intégrale* de Lebesgue d'autre part, a frappé tous ceux qui se sont occupés de ces questions. Dans l'Ouvrage didactique le plus considérable qui ait été consacré depuis quinze ans aux fonctions de variable réelle (²), M. Hobson s'exprime ainsi :

(¹) *Contribution à l'analyse arithmétique du continu* (*Journal de Mathématiques*, 1903).

(²) *Theory of functions of a real variable* (*Cambridge University Press*, 1907).

« A definition of integration has been developed by Lebesgue which is applicable to a more extensive class of functions than those which are integrale in accordance with Riemann's definition. The theory depends essentially upon the employment of the conception of the measure of a set of points, in the sense in which the term is employed by Borel and Lebesgue (p. 390). »

« Sets of points which are not measurable according to Jordan's system are in general measurable in accordance with the Borel-Lebesgue definition ; accordingly functions which are not integrale according to Riemann's definition may be so according to Lebesgue's definition (p. 392). »

M. Lebesgue déclare qu'on ne peut pas lui « opposer » les analogies entre la mesure et l'intégrale, puisque c'est précisément la découverte de ces analogies qui est son principal mérite. J'ai insisté moi-même sur le fait, qu'il y avait là une découverte profonde et non une généralisation aisée et facile ; ce fait ne supprime pas la réalité des analogies ; pour que la découverte de ces analogies fût possible, il fallait tout d'abord que l'un des éléments, c'est-à-dire ma théorie de la mesure, existât au préalable ; je n'ai jamais dit autre chose : si je n'avais pas publié en 1898 mes *Leçons sur la théorie des fonctions*, M. Lebesgue n'aurait probablement pas publié sa définition de l'intégrale. Je tiens à ajouter que la forme très personnelle et, *à certains égards*, inutilement compliquée, que M. Lebesgue a donnée à la théorie de la mesure et de l'intégration, l'a particulièrement bien préparé à certaines applications importantes ; c'est ce que j'avais voulu exprimer en écrivant que ces applications lui sont « entièrement personnelles ». J'entendais par là qu'elles dérivent plus particulièrement de la partie de la pensée de M. Lebesgue qui ne dérive pas de la mienne, de sorte que je renonçais même à revendiquer une paternité indirecte sur ces applications.

Après avoir mis au point les prétendues réclamations de priorité que m'attribue M. Lebesgue, je dois dire quelques mots de divers passages de son Mémoire qui (bien que n'étant pas compris dans le paragraphe qu'il intitule *questions de priorité*) me paraissent être des réclamations de priorité de sa part relativement à mon Mémoire de 1912. En même temps qu'il conteste l'intérêt de la forme que j'ai donnée dans ce

Mémoire à la théorie de la mesure et de l'intégration (j'ai discuté ce point dans le paragraphe précédent), M. Lebesgue revendique la priorité de tous les détails importants de ce mode d'exposition. Il y a quelque contradiction, au moins apparente, dans cette double contestation. Le seul fait que M. Lebesgue ne trouve pas d'intérêt à ce qu'il y a de plus intéressant, à mes yeux, dans mon exposition, suffit pour montrer que cette exposition n'est pas de lui. Aucune Note ou aucun Mémoire récent sur l'intégration ou sur la mesure n'a l'originalité des pages que j'ai publiées en 1898 sur la mesure, ni des pages que M. Lebesgue a publiées en 1901 sur l'intégration. Mon Mémoire de 1912 ne fait pas exception à cette remarque générale; mais, sous cette réserve, les réclamations de M. Lebesgue ne me semblent pas fondées : l'idée qui consiste à utiliser, pour définir une limite, les différences $u_n - u_m$ au lieu de la différence $u - u_n$ n'est pas plus sienne que mienne; mais l'application que j'en fais à l'intégration des suites convergentes de polynomes m'appartient entièrement; les simplifications qui en résultent sont très considérables. J'en dirai autant de l'introduction simultanée de l'approximation à *deux* ε près. M. Lebesgue déclare que j'ai introduit là un langage pittoresque; il n'a pas fait autre chose lorsqu'il a introduit l'expression *presque partout*, qui lui a permis de donner une forme plus maniable à de nombreux énoncés (1). En résumé, les fonctions bornées que je considère diffèrent de moins de ε d'un polynome, sauf peut-être dans une étendue ε; il en résulte que la valeur moyenne de la fonction diffère de moins de $2\varepsilon A$ de la valeur moyenne du polynome : la définition de l'intégrale, son procédé de calcul et sa propriété fondamentale sont ainsi résumés en deux lignes.

IV. — Remarques finales.

Il m'a été particulièrement pénible de me trouver contraint de dis-

(1) Dans son dernier Mémoire, M. Lebesgue adopte une expression pittoresque que j'ai introduite dans mon article de la *Revue générale des Sciences* en disant que son intégrale est faite « sur mesure ». En fait, cette expression me paraît s'appliquer mieux à l'exposition que j'ai donnée qu'à la sienne.

cuter avec M. Lebesgue des questions de priorité; depuis vingt ans, en effet, j'ai été plusieurs fois directement ou indirectement au courant de discussions de priorité entre M. Lebesgue et divers mathématiciens et, si j'ai souvent pensé que les contradicteurs de M. Lebesgue avaient raison, je n'ai jamais cru que M. Lebesgue eût tort. Cette attitude, qui m'a souvent fait taxer d'injustice par ses contradicteurs, est basée sur l'opinion que j'ai de sa bonne foi et de la nature de son esprit. Je n'ai aucune raison pour modifier cette opinion du fait que je me trouve personnellement mis en cause : *patere legem quam fecisti*. Je suis donc amené, après avoir expliqué pourquoi je croyais avoir raison, à indiquer pourquoi je suis convaincu que M. Lebesgue n'a pas tort dans son jugement sur ses propres travaux (1). Il faut, pour cela, que j'essaye d'expliquer ce qui, à mes yeux, caractérise le talent de M. Lebesgue ; je ne chercherai pas à le délimiter en d'étroites formules, ni à préciser en quelques phrases son apport considérable ; même, si je m'en croyais capable, je ne le ferais pas, car la lecture des passages de son Mémoire, où il donne quelques détails sur ses travaux et les stades de sa pensée, prouvent à tous ceux qui pouvaient l'ignorer que, s'il écrivait une Notice détaillée sur ses travaux, il rendrait le plus grand service à la Science. Mais je crois pouvoir dire, sans crainte d'être contredit, que le talent de M. Lebesgue consiste surtout en une grande faculté d'assimilation, une rare originalité de pensée et une puissance créatrice exceptionnelle ; tous ses travaux sont originaux et lui appartiennent en propre, lui sont *entièrement personnels*, parce qu'il ne prend jamais telle quelle une idée d'autrui, pour la développer et s'en servir ; si une idée étrangère lui est utile, c'est à la manière dont un arbre puissant crée des feuilles et des fruits avec tous les aliments qu'il trouve dans le sol.

Mon maître Jules Tannery citait volontiers une phrase de Liouville ; après avoir comparé les démonstrations longues aux démonstrations courtes, il concluait : « En somme, les démonstrations longues ont un

(1) Bien entendu, je conserve mon opinion, contraire à la sienne, sur la portée de ma définition de l'intégrale des fonctions non bornées, sur les définitions constructives et sur la portée exacte de ce qu'il appelle ma « réclamation de priorité » au sujet de l'intégrale définie.

grand avantage, c'est d'être longues, et les démonstrations courtes ont un grand avantage, c'est d'être courtes ». Et Liouville rappelait, paraît-il, quand il était de bonne humeur, la boutade qu'on attribue à Lagrange : « Les mathématiques sont comme le cochon, tout en est bon ». Les démonstrations de M. Lebesgue ont un très grand avantage, c'est qu'elles sont compliquées ; cette complexité entraîne une richesse extraordinaire, une richesse de pensée telle que c'est à grand peine que M. Lebesgue arrive à faire entrer toutes ses idées dans un Livre ou dans un Mémoire. Il reste beaucoup d'idées qu'il n'exprime pas ; il en est d'autres qui sont indiquées seulement par une allusion ou une incidente. Aussi M. Lebesgue est-il seul à connaître toute la richesse de sa pensée et de son œuvre ; il ne faut donc point s'étonner s'il lui arrive peut-être plus fréquemment qu'à d'autres d'avoir à produire des réclamations de priorité. Elles sont certainement toujours justes à ses yeux, et c'est pourquoi j'ai toujours assuré à ceux qui se plaignaient de lui qu'ils n'étaient pas en droit de lui en vouloir ; je m'adresse à moi-même aujourd'hui cette exhortation, afin d'adoucir la peine que m'ont faite certains passages de son Mémoire.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS NOUVELLES

DES

FONCTIONS ENTIÈRES OU MÉROMORPHES

(PREMIER MÉMOIRE)

PAR M. GASTON JULIA.

Historique.

1. Le théorème général sur les fonctions entières et sur les fonctions uniformes à point singulier isolé exposé par M. Picard en 1879 dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, puis développé en 1880 dans les *Annales de l'École Normale supérieure*, est aujourd'hui classique. On sait que M. Picard le démontra en utilisant les propriétés de la fonction modulaire elliptique. Mais l'élégance et la simplicité du résultat faisaient désirer une démonstration élémentaire, qui conduisit directement à la conclusion par la voie des propriétés les plus usuelles des fonctions analytiques. C'est à M. Borel que revint le mérite de construire cette démonstration pour les fonctions entières : on la trouvera dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de 1896. On peut dire que toutes les démonstrations ultérieures du théorème de M. Picard se rattachent d'une manière plus ou moins apparente aux démonstrations données par M. Picard lui-même et par M. Borel, car toutes mettent à la base soit la fonction modulaire, soit la notion de croissance. Ce n'est pas ici le lieu de donner une bibliographie complète des très nombreux travaux où l'on démontre le théorème de M. Picard (1).

En 1904, M. Landau publiait une généralisation du théorème de

(1) *Voir* par exemple Ernst LINDELÖF, *Congrès des Mathématiques à Stockholm*, 1909.

M. Picard qu'il venait d'obtenir en serrant de près certaines inégalités de M. Borel : toute fonction analytique uniforme dont on donne les deux premiers coefficients de Taylor prend la valeur *zéro* ou la valeur *un* dans un cercle dont le rayon n'est fonction que des deux premiers coefficients, ou bien possède dans ce cercle une singularité. M. Carathéodory montra ensuite que les fonctions modulaires jouaient dans ces questions un rôle essentiel et n'étaient pas un pur artifice de démonstration.

2. Plus tard, M. Lindelöf (1), M. Phragmén, M. Iversen, entreprenant d'étudier l'allure d'une fonction monogène uniforme autour d'un point singulier essentiel isolé, obtinrent moyennant diverses hypothèses, des propriétés intéressantes sur les valeurs que prend à l'intérieur d'un contour C une fonction holomorphe en tous points intérieur à C et en tout point de C, sauf un point isolé qui est point singulier essentiel pour la fonction. Les hypothèses faites étaient de nature assez générale et les résultats simples. De son côté, M. Montel (2) appliquait la notion de famille normale de fonctions analytiques à ces mêmes questions, retrouvait les résultats de M. Lindelöf, en précisait quelques-uns, en généralisait d'autres.

Exposé de la question.

3. La plupart de ces hypothèses portaient sur les valeurs que *ne prend pas* la fonction $f(z)$ à étudier, dans un angle dont le sommet O est le point singulier : on suppose que dans cet angle $f(z)$ est bornée ou qu'elle admet deux valeurs exceptionnelles, et l'on tire certaines conclusions relatives aux valeurs limites de $f(z)$ sur les rayons issus du sommet ou sur des courbes ayant une tangente en O intérieure à l'angle.

On ne s'est pas demandé si, pour une fonction uniforme autour d'un

---

(1) *Voir* la bibliographie dans *Acta Soc. Sc. Fennicæ*, t. XLVI, n° 4 : *Sur un principe général de l'Analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme*, par Ernst Lindelöf.

(2) *Voir* MONTEL, *Annales de l'École Normale supérieure*, 1912 et 1916.

point singulier essentiel isolé O, les mêmes hypothèses étaient *permises dans tout angle de sommet* O. Par exemple, dans un angle quelconque ayant son sommet à l'origine, une fonction entière a-t-elle toujours deux valeurs exceptionnelles au moins (dépendant naturellement de l'angle); ou bien existe-t-il certaines directions telles que, si petit que soit un angle contenant une de ces directions, la fonction entière prenne dans cet angle toute valeur finie, sauf peut-être *une*. On est conduit assez naturellement à se poser ces questions par un raisonnement bien simple. Divisons le plan en deux demi-plans par une droite quelconque : peut-il se faire qu'une fonction entière $f(z)$ ne prenne pas deux certaines valeurs finies au moins dans le premier demi-plan, valeurs qui (sauf peut-être une) seraient prises par $f(z)$ dans le deuxième demi-plan, alors que, dans ce deuxième demi-plan, $f(z)$ admettrait aussi deux valeurs exceptionnelles au moins, distinctes de celles du premier demi-plan (afin que l'hypothèse fût conforme au théorème de M. Picard)? On répétera ensuite indéfiniment cette division en 2, 2^2, 2^3, ... pour arriver à la question précédente.

4. Le Mémoire qu'on va lire est consacré à l'étude de ces questions. Son but est en quelque sorte d'analyser le contenu du théorème de M. Picard en précisant davantage le domaine où il est possible d'affirmer qu'une fonction uniforme autour d'un point singulier essentiel O prend toute valeur finie ou infinie, sauf deux valeurs exceptionnelles au plus. M. Picard choisit pour ce domaine un *cercle de rayon arbitrairement petit* ayant son centre en O; je montrerai ici qu'on peut le plus souvent se contenter d'un *angle ayant son sommet en* O, *et d'ouverture arbitrairement petite, pourvu qu'il contienne à son intérieur l'une ou l'autre de certaines directions privilégiées :* il en sera ainsi *pour toute fonction entière et pour toute fonction uniforme autour de* O *qui tend vers une limite déterminée* ω *lorsque z tend vers* O *sur un certain chemin continu aboutissant en* O (1). Je montrerai aussi que l'*on peut*

(1) Lorsqu'il n'y aura pas de *valeurs asymptotiques*, ce qui a lieu pour certaines fonctions méromorphes telles que les fonctions elliptiques, *on réduira d'une autre manière le domaine dans lequel la fonction prend toute valeur finie ou infinie* (*voir* Chapitre II, § III, n° 29).

substituer aux droites passant par O *des courbes semblables aboutissant en* O, quitte à définir convenablement ce qu'est un angle arbitrairement petit, contenant à son intérieur une de ces courbes, bien déterminée.

On obtiendra ainsi, en particulier, des propositions nouvelles sur la *répartition, dans le plan, des racines des équations* $f(z) = a$, quel que soit a, $f(z)$ étant une fonction entière quelconque. Les renseignements trouvés seront relatifs aux *arguments de ces racines* (on possède déjà des renseignements variés sur l'ordre de croissance des modules de ces racines). Ils seront valables pour toute fonction méromorphe ayant *une valeur asymptotique* et, pour celles qui n'en ont pas, on indiquera une autre propriété.

Indication des méthodes et lien avec les travaux antérieurs.

5. Je montrerai d'abord (Chap. I) qu'en poussant jusqu'au bout les conclusions obtenues par M. Lindelöf et ses collaborateurs, en utilisant les méthodes par lesquelles se caractérise l'école scandinave dans l'étude des fonctions, on peut, sinon toujours, du moins dans un grand nombre de cas, en particulier lorsque les hypothèses faites sont celles que l'on retrouve souvent dans les travaux précédents, directement apporter au théorème de M. Picard cette analyse et cette précision qui sont l'objet du présent travail.

Puis j'appliquerai à la question la méthode des familles normales de fonctions analytiques (Chap. II) dont je me suis déjà beaucoup servi dans mon Mémoire *Sur l'itération des fonctions rationnelles* en cours d'impression dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (7ᵉ série, t. IV, 1918) et auquel je renvoie pour la bibliographie (Préliminaires, nº 2). J'obtiendrai ainsi les propositions nouvelles annoncées au nº 4.

6. Le Mémoire actuel est le premier d'une série qui développera les résultats récemment publiés dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. 168, p. 502, 598, 718, 812, 882, 990, 1087). Mon but est d'y étudier par diverses méthodes l'allure d'une fonction uniforme autour d'un point singulier essentiel, et, à cet effet, d'employer

l'approximation de ce point singulier par des modes continus ou discontinus déterminés à priori (¹). Les conclusions obtenues, dépendant évidemment du mode choisi, renferment cependant un caractère commun que le lecteur observera facilement. Au cours de cette recherche, des circonstances nouvelles ont surgi également lorsque j'ai confronté les résultats obtenus et les méthodes utilisées avec d'autres méthodes déjà classiques comme celle de la croissance des fonctions entières : par là, les présentes recherches se relient aux travaux déjà parus sur les fonctions entières.

Remarque. — Je supposerai souvent que le point singulier essentiel est à l'infini et je parlerai de fonctions entières ou de fonctions méromorphes : on verra bien aisément que les conclusions s'appliquent aux fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé qui possèdent autour de ce point le caractère de fonctions entières ou méromorphes.

CHAPITRE PREMIER.

I. — Rappel de résultats antérieurs.

7. Les résultats dont j'aurai surtout à faire usage sont résumés dans les propositions suivantes :

1° « Supposons que la fonction monogène $f(z)$ soit régulière ou méromorphe dans le domaine défini par les inégalités (1) $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, $r < R$ (²), qu'il existe au moins trois valeurs distinctes, dont l'une pourra être ∞, que la fonction ne prend pas dans ce domaine, et désignons par a l'une quelconque de ces valeurs.

» Si la fonction $f(z)$ tend vers a lorsque z tend vers 0 suivant une certaine courbe L qui, pour r suffisamment petit, reste comprise dans l'angle $\varphi_1 + \delta < \varphi < \varphi_2 - \delta$, où $\delta > 0$, elle tendra uniformément

(¹) Je n'étudie dans le présent Mémoire que l'approximation *continue*, par des courbes d'un type déterminé, mais d'ailleurs quelconque.

(²) Le point singulier essentiel est ici supposé à l'origine : $z = re^{i\varphi}$.

vers a dans l'angle (2) $\varphi_1 + \varepsilon \leq \varphi \leq \varphi_2 - \varepsilon$, quelque petit que soit le nombre positif ε.

» Si, au contraire, sur une courbe telle que L, l'expression $|f(z)-a|$ ou, lorsque $a=\infty$, l'expression $\frac{1}{|f(z)|}$ reste, pour r assez petit, supérieure à une limite positive, il en sera de même dans l'angle (2), quelque petit que soit ε.

» D'autre part, si la fonction $f(z)$ tend vers une limite déterminée quelconque C, lorsque z tend vers O suivant un certain rayon compris dans l'angle (1), elle ne saurait tendre vers une limite différente de C sur aucun rayon intérieur à cet angle. Si $f(z)$ tend vers C sur deux rayons différents, elle tendra uniformément vers C dans l'angle formé par ces rayons. Si $f(z)$ tend vers C sur un certain rayon dont l'argument φ_0 est compris entre φ_1 et φ_2, et s'il existe des rayons d'arguments aussi peu différents de φ_0 qu'on voudra sur lesquels $f(z)$ ne tend pas vers C, l'équation $f(z)=C$ admettra nécessairement une infinité de racines tendant vers O et dont les arguments tendent vers φ_0.

» Enfin sur deux courbes quelconques tendant vers O et ayant en ce point une tangente commune dont l'argument est compris entre φ_1 et φ_2, les valeurs limites de $f(z)$ seront les mêmes. »

Cette proposition, énoncée par M. Lindelöf dans son Mémoire *Sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions homogènes...* (Helsingfors, 1908), fut reprise, précisée et étendue grâce à la représentation conforme par son élève, M. Iversen, dans sa thèse (Helsingfors, 1914) *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes*, dont j'extrais (p. 29) la proposition suivante :

2° « Soit T un domaine infini du plan des z limité par un seul contour sans points multiples, et désignons par Γ' et Γ'' les deux branches infinies de ce contour. Soit, d'autre part, $f(z)$ une fonction monogène n'admettant à l'intérieur et sur le contour du domaine T d'autres singularités à distance finie que des pôles.

» Si cette fonction tend sur Γ' et Γ'' vers la même limite, ou bien elle tend uniformément vers cette limite dans T, lorsque z augmente

indéfiniment, ou bien elle prend toute valeur, sauf deux au plus, en une infinité de points compris dans T.

» Si la fonction $f(z)$ tend sur Γ' et Γ'' vers des limites distinctes, elle prend toute valeur, sauf deux au plus, en une infinité de points intérieurs à T. »

II. — Application à la question actuelle.

8. On peut appliquer ces deux propositions à l'étude des valeurs que prend une fonction entière (¹) ou méromorphe dans les divers secteurs aboutissant au point à l'infini : pour simplifier l'exposition, on supposera que ces secteurs sont limités par des rayons issus de l'origine.

En remarquant d'abord que la fonction e^z tend vers l'infini sur tout rayon d'argument compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ et vers zéro sur tout rayon d'argument compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, on conclut que e^z prend toute valeur finie non nulle (une infinité de fois) dans tout angle, si petit soit-il, qui contienne l'axe imaginaire du plan z. C'est un fait intéressant qu'on peut expliquer par la périodicité de e^z et qui appelle une *généralisation*.

9. Plus généralement, en supposant qu'une fonction entière ou méromorphe $f(z)$, sur un certain chemin L allant à l'infini de manière que l'argument de z sur L tende vers une limite φ_0, possède une limite déterminée ω, on peut avoir des conclusions analogues. En effet, un secteur quelconque, qui contient le rayon φ_0 à son intérieur, contient aussi à partir d'un certain moment le chemin L. Si, dans ce secteur, $f(z)$ a trois valeurs exceptionnelles (²), $f(z)$ devra tendre vers ω sur

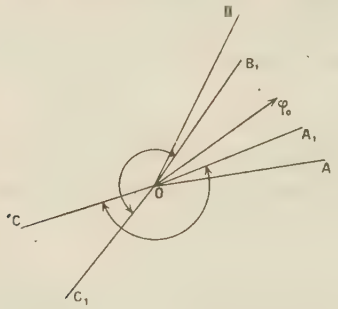
(¹) Une fonction entière est une fonction méromorphe admettant la valeur exceptionnelle ∞. Toute fonction méromorphe admettant une valeur exceptionnelle se ramène par transformation homographique à une fonction entière, elle est donc justiciable des mêmes méthodes.

(²) Je dirai dans la suite que a est valeur exceptionnelle de $f(z)$ dans un domaine T contigu à un point singulier essentiel isolé O, si, à l'intérieur de T, et dans un certain voisinage de O, $f(z)$ ne prend pas la valeur a.

tout rayon intérieur au secteur et tendra uniformément vers ω dans tout secteur intérieur au secteur considéré. Deux hypothèses sont donc seulement possibles :

1° Ou bien, dans tout secteur contenant le rayon φ_0, la fonction méromorphe $f(z)$ prend (une infinité de fois) toute valeur, sauf peut-être deux valeurs exceptionnelles au plus ;

2° Ou bien, dans un certain secteur AOB contenant le rayon φ_0, $f(z)$ admet trois valeurs exceptionnelles au moins, et alors il en est



visiblement de même dans tout secteur intérieur à AOB. Il faut alors considérer les autres secteurs de sommet O. Par O on mènera deux rayons voisins OC et OC_1 extérieurs à AOB et d'ailleurs quelconques, puis OA_1 et OB_1 très voisins de OA et OB, intérieurs à AOB. On envisagera les deux secteurs A_1OC et B_1OC_1 ayant en commun le secteur COC_1. Sur tout rayon de A_1OC qui est entre OA et OA_1, $f(z)$ tend vers ω; si donc dans A_1OC $f(z)$ a trois valeurs exceptionnelles, dans tout secteur intérieur à A_1OC, $f(z)$ devra tendre uniformément vers ω quand z tendra vers l'infini. La même conclusion s'applique à B_1OC_1. Il est donc impossible de supposer que dans chacun des trois secteurs AOB, A_1OC, B_1OC_1 $f(z)$ a trois valeurs exceptionnelles (¹), sans quoi $f(z)$ devrait tendre uniformément vers ω au voisinage de l'∞. Donc, dans A_1OC par exemple, $f(z)$ prendra toute valeur finie ou

(¹) Bien entendu, ces valeurs exceptionnelles devraient être supposées *a priori différentes pour les différents secteurs* puisque $f(z)$, d'après le théorème de M. Picard, n'admet autour du point à l'infini que deux valeurs exceptionnelles au plus.

infinie, sauf deux valeurs au plus. On recommencera le raisonnement, on divisera ce secteur A_1OC, en menant dans ce secteur deux rayons OD et OD_1 voisins et considérant les deux secteurs A_1OD et D_1OC qui ont en commun le secteur DOD_1. Si, *dans chacun d'eux*, $f(z)$ avait trois valeurs exceptionnelles, on conclurait que $f(z)$ devrait encore, dans A_1OC, tendre uniformément vers ω, ce qui ne peut être.

Par ce procédé *de divisions successives*, on trouvera toujours une infinité de secteurs *emboîtés*, dont l'ouverture tendra vers zéro, dans chacun desquels $f(z)$ a deux valeurs exceptionnelles au plus. Il pourra y avoir d'ailleurs plusieurs suites de secteurs emboîtés du type précédent. Chacune d'elles admettra un rayon limite. Soit OP un de ces rayons limites : *dans tout secteur contenant* OP, *si petite qu'on suppose son ouverture*, $f(z)$ *prendra toute valeur finie ou infinie, sauf peut-être deux valeurs exceptionnelles au plus*. En essayant d'appliquer les hypothèses et les conclusions de M. Lindelöf et ses collaborateurs, non plus à un seul secteur, mais à *tous les secteurs* aboutissant à l'infini, on aboutit à une impossibilité qui conduit à une proposition nouvelle précisant le théorème de M. Picard.

10. Mais on n'a pas ainsi obtenu une proposition *générale* qui s'applique à toutes les fonctions entières ou à toutes les fonctions méromorphes parce qu'un chemin de la nature de celui qui a été appelé L au n° 9 n'existe pas toujours. On sait bien, à vrai dire, que toute fonction entière tend vers l'infini sur certains chemins γ aboutissant à l'infini, mais on ne sait pas *a priori* si ces chemins ont une direction asymptotique φ_0. Il ne serait pas très malaisé d'étendre l'analyse du n° 9 au cas où l'argument de z sur γ resterait compris entre des limites finies φ_1 et φ_2. En renonçant également à employer des secteurs rectilignes pour employer des secteurs limités par des courbes semblables, et usant des propriétés connues de la représentation conforme, on arriverait aisément à établir une propriété analogue à celle du n° 9 pour toute fonction entière. Par exemple, on ferait jouer au chemin γ, sur lequel $f(z)$ tend vers l'infini, le rôle que jouait le rayon φ_0 dans l'analyse précédente en encadrant γ de deux chemins semblables, et substituant aux rayons issus de O des chemins semblables à γ. Le sec-

teur d'ouverture arbitrairement petite, contenant la direction privilégiée OP, serait remplacé ici par un secteur d'ouverture arbitrairement petite balayé par une courbe semblable à $\mathcal{L}$ et contenant une certaine courbe semblable à $\mathcal{L}$, privilégiée en position. Mais ce n'est pas pour l'instant mon but, car la méthode des familles normales de fonctions analytiques fournira d'un coup toutes ces généralisations sans aucune peine comme on le verra au Chapitre II.

11. Cependant, il n'est pas inutile de remarquer dès maintenant que les résultats du n° 7 permettent encore, sous des hypothèses moins restrictives, d'obtenir la même proposition qu'au n° 8.

Soit une fonction entière $f(z)$ pour laquelle existe un chemin L allant à l'infini dans une direction d'argument φ_0 sur lequel $f(z)$ reste bornée. On ne peut faire sur elle que deux hypothèses qui s'excluent naturellement comme au n° 9 :

1° Ou bien dans tout secteur contenant le rayon φ_0, si petite soit son ouverture, $f(z)$ prend toute valeur finie, sauf une au plus;

2° Ou bien dans un certain secteur AB contenant φ_0, $f(z)$ admet au moins deux valeurs exceptionnelles finies. Alors $f(z)$ reste bornée dans tout secteur intérieur à AOB. On mènera OA_1 et OB_1, respectivement voisins de OA et OB, dans le secteur AOB. Comme au n° 9, on mènera deux rayons voisins OC et OC_1 extérieurs à AOB de façon que les deux secteurs A_1OC et B_1OC_1 aient en commun le secteur COC_1. Si, dans le secteur A_1OC, $f(z)$ avait deux valeurs exceptionnelles finies, comme elle est bornée sur tout rayon du secteur A_1OA, elle serait bornée dans tout secteur intérieur à A_1OC. Le même raisonnement s'applique au secteur B_1OC_1. Comme $f(z)$ n'est pas bornée autour du point à l'infini, il faut supposer que dans l'un des deux secteurs A_1OC, B_1OC_1, $f(z)$ n'a qu'une valeur exceptionnelle finie au plus, par exemple dans A_1OC. Le raisonnement pourra se refaire en divisant A_1OC par deux rayons voisins OD et OD_1 tels que les secteurs A_1OD et D_1OC aient en commun le secteur DOD_1 : nécessairement, dans l'un de ces deux secteurs, A_1OD par exemple, $f(z)$ ne pourra avoir qu'une valeur exceptionnelle finie au plus. L'application indéfinie de ce procédé par divisions successives donnera une (ou plusieurs) série de secteurs

emboîtés, d'ouverture tendant vers zéro, dans chacun desquels $f(z)$ admet une valeur exceptionnelle au plus. Ces secteurs ont un rayon limite OP jouissant de la propriété du n° 9 : *dans tout secteur contenant* OP, *si petite soit son ouverture, la fonction entière* $f(z)$ *prend toute valeur finie, sauf peut-être une valeur au plus.*

12. La même proposition s'applique à toute fonction méromorphe ayant une valeur exceptionnelle a, pour laquelle, sur un chemin L allant à l'infini suivant une direction φ_0, on a, à partir d'un certain moment $|f(z) - a| > A$. La fonction $\frac{1}{f(z)-a}$ est en effet une fonction entière bornée sur L.

L'hypothèse que L ait une direction asymptotique déterminée n'est pas essentielle pour la validité du résultat : avec peu de modifications du raisonnement, on pourrait supposer simplement que, sur L, l'argument de z reste compris entre deux limites finies. Enfin l'aide de la représentation conforme pourrait permettre, comme on l'a dit au n° 10, d'étendre le théorème à toute fonction entière. Je n'insisterai cependant pas sur l'emploi des méthodes précédentes, mon but étant, dans ce Chapitre, de prouver simplement qu'en poussant jusqu'au bout les conclusions obtenues par M. Lindelöf et ses collaborateurs dans les hypothèses où ils s'étaient placés pour obtenir la plupart de ces résultats, on pouvait arriver, au moins dans un grand nombre de cas, aux propositions nouvelles qui font l'objet du Mémoire actuel.

CHAPITRE II.

LES FONCTIONS ENTIÈRES GÉNÉRALES ET LES FONCTIONS MÉROMORPHES.

J'utiliserai ici la notion de famille normale de fonctions analytiques que M. Montel a déjà appliquée à la démonstration du théorème de M. Picard (*voir* ses deux Mémoires dans les *Annales de l'École Normale supérieure*, 1912 et 1916) et que j'ai appliquée moi-même dans l'étude des questions d'itération (voir *Journal de Jordan*, 1918). Je renvoie à ces Mémoires pour les propositions qui me seront utiles ici.

I. — Les fonctions entières (1).

13. On se propose ici d'étudier les valeurs prises par une fonction entière lorsqu'on s'approche du point à l'infini en suivant des courbes continues d'une *forme déterminée donnée à priori*. On se donnera la forme de ces courbes par la donnée d'une fonction d'une variable réelle t, $\sigma(t) = \sigma_1(t) + i\sigma_2(t)$. Lorsque t variera de 1 à $+\infty$, le point $T = \sigma(t)$ décrira une courbe continue $C[\sigma(1) = 1,\ \sigma(\infty) = \infty]$ passant par le point d'affixe 1 et allant à l'infini. Une courbe semblable à C passant par le point z sera décrite par le point $z\sigma(t)$ lorsque, z restant fixe, t varie de 1 à $+\infty$. J'appellerai zC cette courbe. C'est sur de pareilles courbes que j'étudierai les valeurs d'une fonction entière $f(z)$ quelconque.

On formera avec $f(z)$ et $\sigma(t)$ une famille de fonctions $f_t(z) = f[z\sigma(t)]$ dépendant du paramètre continu t qui sont toutes des fonctions entières. Les valeurs prises par $f(z)$ sur une courbe zC ne sont autres que les valeurs prises par toutes les fonctions $f_t(z)$ au point z, lorsque t varie. Si l'on imagine que z décrive une couronne circulaire (2) de centre O dont les deux cercles limites C_1 et C_2 sont absolument quelconques, il est clair que le point $z\sigma(t)$, t variant aussi de 1 à $+\infty$, décrira en particulier toute la région du plan extérieure à la couronne jusqu'à l'infini. Le théorème de M. Picard dit, en passant de $f(z)$ aux $f_t(z)$, que dans la couronne (C_1, C_2), il existe au plus une valeur finie que ne puisse prendre aucune des fonctions $f_t(z)$. Mais il est possible d'affirmer davantage, et c'est cette remarque essentiellement nouvelle qui permet d'obtenir les résultats auxquels j'ai fait allusion dans l'Introduction.

14. M. Montel a démontré en effet que toute famille de fonctions, holomorphes dans une aire D, qui, dans cette aire, ne prennent pas deux certaines valeurs finies au moins, est une famille *normale* : de toute suite infinie de fonctions de la famille on peut extraire une suite qui, dans toute aire intérieure à D, converge uniformément vers une

(1) Voir *Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 168, p. 502.

(2) Une couronne quelconque limitée par deux courbes entourant l'origine remplirait absolument le même office.

fonction limite analytique ou vers une constante infinie. Mais *la réciproque n'est pas vraie*, en ce sens qu'on peut avoir une famille de fonctions holomorphes, normale dans une aire D, et telle que toute valeur finie soit prise par une fonction au moins de la famille dans l'aire D; on peut en donner l'exemple simple suivant : choisir une infinité de constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ telles que, Δ étant l'aire décrite par le point $W = \varphi(z)$ quand z décrit D [$\varphi(z)$ fonction holomorphe dans D], les aires $\Delta + C_1$, $\Delta + C_2$, $\ldots$, $\Delta + C_n$, $\ldots$ recouvrent tout le plan des W : la famille des $\varphi_i(z) = \varphi(z) + C_i$ est normale dans D et n'admet pas dans D de valeur exceptionnelle finie. De ce qu'une famille de fonctions admet moins de deux valeurs exceptionnelles dans D, il ne s'ensuit pas qu'elle cesse d'être normale en quelque point de D.

15. Revenant à la famille des $f_t(z)$, qui, dans la couronne arbitraire (C_1, C_2), ne peut admettre qu'une valeur exceptionnelle au plus, rien ne s'oppose donc *a priori*, à ce que cette famille soit normale dans toute la couronne. Et cependant on va voir qu'elle ne peut pas l'être, on va montrer qu'*il est impossible de supposer que la famille des* $f_t(z)$ *soit normale en tout point de la couronne* (c'est-à-dire dans un petit domaine entourant ce point) : on en conclura qu'il existe dans la couronne *un point* z_0 *au moins autour duquel la famille n'est pas normale*, et par suite que dans une aire ω_0, arbitrairement petite, autour de z_0, il est impossible que les fonctions $f_t(z)$ de la famille admettent deux valeurs exceptionnelles au moins : dans toute aire entourant ω_0, les $f_t(z)$ prennent toute valeur finie, sauf peut-être une au plus. La démonstration qui va suivre constitue donc à vrai dire une nouvelle démonstration du théorème de M. Picard, distincte de celle de M. Montel, donnant un résultat plus précis, et comme une analyse du contenu de ce théorème de M. Picard.

16. Prenant en effet une suite infinie de fonctions $f_t(z)$ correspondant à la suite d'indices croissants

$$t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n < \ldots \quad [t_n \to \infty],$$

à supposer qu'elle soit normale dans toute la couronne (C_1, C_2), on pourra en extraire une suite infinie $(t_{n_1} < t_{n_2} < \ldots)$ qui, dans la couronne, convergera uniformément vers une fonction holomorphe ou vers

la constante infinie. Or il est impossible que la limite soit une fonction holomorphe ou une constante finie, car on pourrait alors trouver une infinité de couronnes, à savoir toutes les couronnes $(t_{n_i}C_1, t_{n_i}C_2)$ pour $n_i > N$, s'en allant à l'infini et dans lesquelles $f(z)$ serait borné. Si la famille des $f_t(z)$ est normale dans (C_1, C_2), toute *fonction limite*, pour une infinité de $f_{t_n}(z)$ correspondant à des t_n grandissant indéfiniment, est *nécessairement identique à la constante infinie*.

Ceci exige que, t tendant vers l'infini, la fonction $f_t(z)$ tende uniformément vers l'infini, dans la couronne (C_1, C_2).

L'hypothèse contraire conduirait en effet à admettre qu'on peut trouver une suite d'indices croissant indéfiniment

$$t_1 < t_2 < t_3 \ldots < t_n < \ldots < t_n \to \infty$$

telle que pour chaque fonction $f_{t_i}(z)$ on ait en quelque point z_i de la couronne $|f_{t_i}(z_i)| < M$, M étant un nombre positif fixe. La famille des $f_{t_i}(z)$ étant normale dans la couronne, on en pourrait extraire une suite $f_{t_{n_i}}(z)$ convergeant uniformément dans la couronne vers une fonction holomorphe qui ne saurait être la constante infinie puisqu'au point z_n la fonction $f_{t_{n_i}}(z)$ est en module $< M$. On aboutirait donc à une contradiction : il y aurait une fonction limite pour une infinité de $f_{t_n}(z)$ qui ne serait pas infinie.

Il faut donc que pour $t > t_0$ on ait, dans toute la couronne (C_1, C_2),

$$|f(z)| > M,$$

M étant un nombre positif arbitrairement grand, donné *a priori*, et dont t_0 dépend.

Mais il est bien clair que les valeurs prises par les $f_t(z)$ $(t > t_0)$ dans la couronne (C_1, C_2) comprennent toutes les valeurs *prises par* $f(z)$ *à l'extérieur de la couronne* $[\sigma(t_0)C_1, \sigma(t_0)C_2]$, on aurait donc, à l'extérieur de cette couronne,

$$|f(z)| > M,$$

ce qui contredit le théorème de Weierstrass bien connu d'après lequel, au voisinage d'un point singulier essentiel isolé, une fonction uniforme s'approche autant qu'on le veut de toute valeur donnée à l'avance.

La conclusion est bien celle annoncée au n° 15 : *il est impossible que les $f_t(z)$ forment une famille normale dans toute la couronne* C_1, C_2.

17. *Il existe donc au moins un point z_0 dans toute couronne* $(C_1 C_2)$ *entourant l'origine, où la famille des $f_t(z)$ n'est pas normale.* Si petit que soit le cercle ω_0 de centre z_0, la famille des $f_t(z)$ ne peut être normale dans ce cercle. Les fonctions $f_t(z)$ ne peuvent donc admettre, dans ce cercle, plus d'une valeur exceptionnelle finie, sans quoi elles formeraient une famille normale. Considérant maintenant la courbe $z_0 C$, semblable à C, menée par z_0, elle est décrite par le point $z_0\sigma(t)$ quand t varie de 1 à $+\infty$. Lorsque z décrit le petit cercle ω_0 de centre z_0, le point $z\sigma(t)$ décrit un cercle $\omega_0\sigma(t)$ ayant pour centre le point $z_0\sigma(t)$ de la courbe $z_0 C$ et dont le rayon est au rayon du cercle ω_0 dans le rapport $|\sigma(t)|$, rapport des modules des centres z_0 et $z_0\sigma(t)$. Lorsque z décrit ω_0, et t varie de 1 à $+\infty$, le point $z\sigma(t)$ va donc décrire une bande Δ, d'ouverture arbitrairement étroite avec le rayon de ω_0, contenant à son intérieur la courbe privilégiée $z_0 C$: cette bande sera balayée par le cercle $\omega_0\sigma(t)$ dont le centre $z_0\sigma(t)$ décrit la courbe $z_0 C$ pendant que son rayon varie en restant proportionnel au module de son centre : le rayon initial, rayon de ω_0 est arbitrairement petit, ce qu'on exprime en disant que l'ouverture de la bande Δ est arbitrairement petite.

Or les valeurs prises par les fonctions $f_t(z)$ dans le cercle ω_0 ne sont autres que les valeurs prises par la fonction $f(z)$ dans la bande Δ balayée par le cercle $\omega_0\sigma(t)$. On en conclut que, *si petite que soit l'ouverture de la bande Δ, pourvu qu'elle contienne à son intérieur la courbe privilégiée $z_0 C$, la fonction $f(z)$ prendra, dans cette bande Δ, toute valeur finie, sauf peut-être une valeur exceptionnelle au plus.* Il est clair, d'ailleurs, que si la fonction $f(z)$ admet une valeur exceptionnelle a dans tout le plan (comme l'est zéro pour la fonction e^z), c'est précisément cette valeur a que $f(z)$ ne prendra pas dans la bande Δ, toute autre valeur finie sera effectivement prise.

Il est clair également que *toute valeur finie* (sauf peut-être la valeur exceptionnelle éventuelle) *sera prise par $f(z)$ une infinité de fois dans Δ*, car si deux valeurs a et b distinctes n'étaient prises dans Δ qu'un nombre fini de fois, cela voudrait dire que pour $t > t_0$ les $f_t(z)$ ne

prendraient plus dans $\mathfrak{D}_0$ les valeurs a et b, on en conclurait que ces $f_t(z)$ pour $t > t_0$ formeraient une famille normale dans $\mathfrak{D}_0$, et ceci contredit la propriété reconnue au point z_0.

18. Le mode de raisonnement employé donne donc le théorème de M. Picard en même temps qu'il le précise. Non seulement une fonction entière $f(z)$ quelconque prend toute valeur finie (sauf peut-être une valeur exceptionnelle au plus) à l'extérieur d'un cercle quelconque, si grand soit-il, mais on peut encore affirmer qu'elle les prend toutes, à l'extérieur de ce cercle, *dans un secteur curviligne* Δ *arbitrairement étroit, de forme arbitrairement donnée à priori*, mais contenant à son intérieur l'une ou l'autre de certaines courbes, privilégiées en position semblables à la courbe C donnée *a priori;* l'arbitraire de ces courbes est très grand puisqu'on n'a supposé à C que deux propriétés : d'être continue et d'aller à l'infini pour $t = +\infty$. Par exemple, si C est une demi-droite passant par l'origine, on pourra trouver une ou plusieurs demi-droites issues de l'origine, telles que dans tout angle ayant pour sommet O ou tout autre point d'une de ces droites, et contenant cette demi-droite, la fonction $f(z)$ prenne une infinité de fois toute valeur finie à l'exception peut-être d'une seule valeur. Pour la fonction $f(z) = e^z$ les deux rayons privilégiés sont l'axe imaginaire positif et l'axe imaginaire négatif. Cet exemple très simple montre d'ailleurs que, *sur un rayon privilégié*, $f(z)$ *peut être bornée et ne prendre que des valeurs réparties sur une courbe simple*, alors que les valeurs prises par $f(z)$ dans tout angle contenant le rayon recouvrent tout le plan; sur l'axe imaginaire, en effet, $|e^z| = 1$, et par conséquent les points $W = e^z$ correspondants se répartissent sur toute la circonférence $|W| = 1$.

19. *Remarque I.* — La proposition précédente renferme deux éléments : 1° la forme de la courbe C est *donnée a priori;* 2° dans un secteur arbitrairement étroit encadrant une courbe z_0C, $f(z)$ prend *effectivement* toute valeur finie (sauf peut-être une seule). Si l'on n'exige pas tant de précision, on peut donner une proposition qui serait à la proposition précédente ce que le théorème de Weierstrass

est au théorème de M. Picard. Il est facile en effet de construire une (1) courbe continue Γ, tendant vers l'infini et telle que les valeurs de $W = f(z)$, *sur cette courbe*, soient *denses dans tout le plan* W ; lorsque z décrira cette courbe Γ $f(z)$ *s'approchera indéfiniment* de tout point du plan W. Cela ne veut cependant pas dire que, dans la bande Δ balayée par un cercle Ω dont le centre décrit Γ, comme cela a été fait pour la courbe $z_0 C$ au n° 17, la fonction $f(z)$ prendra *effectivement* toute valeur finie.

On rangera d'abord en une suite infinie tous les points d'affixe rationnel du plan W, en les désignant par $W_1, W_2, \ldots, W_n, \ldots$. On sait que cela est possible et l'on a de nombreux moyens de le réaliser. Parmi ces points, il en est un au plus W_0 tel que l'équation $f(z) = W_0$ n'ait qu'un nombre fini de racines. On le supprimera. On appellera z_i une racine de l'équation $f(z) = W_i$. On choisira d'abord arbitrairement une racine Z_1 de $f(z) = W_1$, puis on prendra la première racine de l'équation $f(z) = W_2$ dont le module soit *supérieur* à $|Z_1|$ et on l'appellera Z_2. La première racine de $f(z) = W_3$ dont le module soit supérieur à $|Z_2|$ sera choisie et s'appellera Z_3, etc. Joignant $Z_1Z_2, Z_2Z_3, \ldots$ par des segments de droite, on aura une courbe continue Γ tendant vers l'infini.

Lorsque z décrira Γ, $W = f(z)$ décrira une courbe continue passant par tous les points rationnels W_i. Cela veut dire que, quelque grand que soit un cercle de centre O, lorsque z décrira la partie de Γ extérieure à ce cercle, le point $W = f(z)$ décrira une courbe *s'approchant indéfiniment de tout point du plan*, car la suppression d'un nombre fini de points rationnels W_i (à quoi conduit *a priori* l'obligation pour z d'être extérieur au cercle considéré) n'empêche pas l'ensemble des W_i restants d'être dense dans tout le plan. Il va sans dire que je n'ai indiqué des choix aussi précis pour les racines Z_i et pour les courbes Z_iZ_j que pour avoir *une* courbe Γ qui fût bien déterminée, mais il est clair que ces choix peuvent être variés de bien des manières pour fournir des courbes Γ satisfaisantes. Sur Γ, $f(z)$ s'approche indéfini-

(1) Ou plusieurs courbes continues. Mais ici la forme de ces courbes *n'est pas donnée à priori* puisqu'elle dépend, comme on va le voir, des racines des équations $f(z) = W_i$ (W_i rationnel).

ment de toute valeur finie, mais *a priori* rien ne permet de conclure que dans une bande Δ contenant Γ et construite comme au n° 17 $f(z)$ prend effectivement toute valeur finie; pour qu'il en fût ainsi il faudrait que, lorsque z décrit le cercle $\mathfrak{D}$ qui balaye la bande Δ, l'aire $\mathfrak{D}'$ décrite par $W = f(z)$ fût telle qu'au mouvement et à la déformation de $\mathfrak{D}$ correspondissent un mouvement et une déformation de $\mathfrak{D}'$ dans lesquels *tout point du plan serait intérieur à* $\mathfrak{D}'$: on n'aperçoit pas de raisons pour qu'il en soit ainsi quelque petit qu'on suppose le rayon initial de cercle $\mathfrak{D}$.

La proposition obtenue n'est donc pas aussi précise que celle du n° 17, on peut dire à ce point de vue qu'elle est à cette proposition comme le théorème de Weierstrass est à celui de M. Picard.

20. *Remarque II.* — La proposition fondamentale démontrée au n° 17 est qu'il est impossible que la famille des fonctions $f_t(z)$ soit normale dans *toute* la couronne (C_1, C_2) et cela quelle que soit cette couronne, pourvu qu'elle entoure l'origine. Mais il peut arriver et il arrive effectivement que cette famille soit normale dans certaines parties de la couronne séparées entre elles par des points où elle cesse de l'être. Il suffit pour s'en convaincre de prendre la fonction e^z et de choisir pour C une droite passant par l'origine. Ici $\sigma(t) = t$. La famille des fonctions $f_t(z) = f[z\sigma(t)] = e^{zt}$ est normale dans toute la partie de la couronne (C_1, C_2) située *à droite* de l'axe imaginaire, et *à l'intérieur* de cette partie elle tend uniformément vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$; la famille est aussi normale dans la partie de la couronne située *à gauche* de l'axe imaginaire et, *à l'intérieur* de cette partie, elle tend uniformément vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Ces deux parties sont séparées par deux segments de l'axe imaginaire sur lesquelles la famille cesse d'être normale. Il peut se faire aussi que la famille des $f_t(z)$ ne soit normale en aucun point du plan z. C'est ce qui arrive en particulier pour les fonctions entières elliptiques, par exemple la fonction classique $\sigma(z)$. En effet, on sait que cette fonction s'exprime par le produit infini canonique

$$\sigma(z) = z \prod_{W}{}' \left[\left(1 - \frac{z}{W}\right) e^{\frac{z}{W} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{W^2}} \right],$$

où l'on a posé

$$W = 2h_1\omega_1 + 2h_2\omega_2;$$

$2\omega_1$ et $2\omega_2$ étant les périodes et h_1, h_2 des entiers quelconques positifs ou négatifs, l'indice Π' indiquant qu'on ne prend pas la combinaison $h_1 = h_2 = 0$. $\sigma(z)$ admet pour zéros simples tous les sommets du réseau de parallélogrammes des périodes.

Envisageant une *spirale* C *quelconque* tournant une infinité de fois autour du point à l'infini (¹) et correspondant à une certaine fonction $\Sigma(t)$, on formera la famille des fonctions $\sigma_t(z) = \sigma[z\Sigma(t)]$. Les valeurs prises par une fonction $\sigma_t(z)$ dans un *petit cercle quelconque* $\mathfrak{D}_0$ du plan z sont celles que prend la fonction $\sigma(z)$ elle-même dans le cercle $\mathfrak{D}_0\Sigma(t)$. Or, si petit que soit pris $\mathfrak{D}_0$ *a priori*, pourvu que t soit assez grand ($t > t_0$), le cercle $\mathfrak{D}_0\Sigma(t)$ aura un rayon supérieur à telle limite positive qu'on voudra. Ce cercle contiendra donc, pourvu que $t > t_0$, un nombre de parallélogrammes de périodes aussi grand qu'on voudra, et, dans ce cercle, $\sigma(z)$ aura un nombre de zéros supérieur à tel nombre positif qu'on se sera donné arbitrairement, *a priori*. Les fonctions holomorphes $\sigma_t(z)$ auront dans le cercle $\mathfrak{D}_0$ *un nombre de zéros dépassant toute limite quand t croît indéfiniment*. Ceci suffit pour qu'on puisse affirmer que la famille des $\sigma_t(z)$ n'est pas normale dans $\mathfrak{D}_0$ (²). La

---

(¹) Par exemple une spirale logarithmique quelconque de pôle O.

(²) En effet, toute fonction limite d'une infinité de $\sigma_{t_n}(z)$ dont les indices t_n croissent indéfiniment devrait être *identiquement nulle dans* $\mathfrak{D}_0$; pour $t \to \infty$, $\sigma_t(z)$ devrait tendre uniformément vers zéro dans $\mathfrak{D}_0$. Or cela n'est pas, ainsi qu'il résulte des propriétés classiques de la fonction $\sigma(z)$. On a en effet

$$\sigma[z_0 + 2h_1\omega_1 + 2h_2\omega_2] = (-1)^{h_1h_2+h_1+h_2}\, e^{(2h_1\eta_1+2h_2\eta_2)(z_0+h_1\omega_1+h_2\omega_2)}\sigma(z_0).$$

z_0 étant fixe, les valeurs de $|\sigma(z_0 + 2h_1\omega_1 + 2h_2\omega_2)|$ pour h_1 et h_2 *très grands* dépendent essentiellement du terme $e^{(2h_1\eta_1+2h_2\eta_2)(z_0+h_1\omega_1+h_2\omega_2)}$ dont la valeur absolue est

$$e^{\mathcal{R}[(2h_1\eta_1+2h_2\eta_2)(z_0+h_1\omega_1+h_2\omega_2)]}.$$

Or, quel que soit z_0 fixe, l'équation en h_1h_2

$$\mathcal{R}[(2h_1\eta_1 + 2h_2\eta_2)(z_0 + h_1\omega_1 + h_2\omega_2)] = 0$$

représente une conique dont le genre ne dépend pas de z_0. La région

$$\mathcal{R}[(2h_1\eta_1 + 2h_2\eta_2)(z_0 + h_1\omega_1 + h_2\omega_2)] > 0$$

ne peut être finie, sans quoi $\sigma(z)$ serait bornée dans tout le plan. Cette région, allant à

fonction $\sigma(z)$ jouit donc de cette propriété remarquable de prendre toute valeur finie sauf peut-être une seule *dans toute bande* Δ, *d'ouverture arbitrairement petite*, construite à partir de *tout point* z_0 *du plan*.

21. On peut alors, si l'on veut, parler de l'ensemble E des points autour desquels la famille des $f_t(z)$ n'est pas normale. On sait que cet ensemble a un point au moins sur toute courbe entourant l'origine, puisqu'on a établi au n° 17 qu'il avait au moins un point dans toute couronne d'épaisseur arbitrairement petite entourant l'origine. C'est évidemment un ensemble fermé, et ce qui précède montre que cet ensemble fermé contient toujours *un continu* (1). Il est clair que E dépend de la courbe C donnée *a priori*, et, en particulier, il peut se se présenter des circonstances différentes, selon que les diverses courbes zC issues de tous les points z du plan forment une famille à deux paramètres réels ou à un seul. Si, par exemple, les courbes ζC relatives à tous les points ζ d'une certaine courbe z_0C coïncident avec cette courbe z_0C, comme cela arrive par exemple lorsque C est une droite passant par O ou une spirale logarithmique de pôle O(2), il est clair que les diverses courbes zC ne dépendront plus que d'un paramètre réel : dans ce cas on voit de suite que, si la famille des $f_t(z)$ n'est pas normale en un point z_0 du plan, elle ne l'est en aucun point de la courbe z_0C issue de z_0.

Lorsque la fonction entière $f(z)$ *admet une valeur exceptionnelle finie a*, comme l'est zéro pour e^z, on peut affirmer en outre que, quel que soit C, E *est un ensemble parfait, car aucun point* P *de* E *ne peut être isolé*. S'il l'était, en effet, on pourrait de toute suite t_1, t_2, ..., t_n, ..., ∞ extraite de la famille $f_t(z)$, extraire une suite qui, dans un petit cercle de centre P, convergerait partout, *sauf au centre*, vers une

---

l'infini sera donc traversée une infinité de fois par la bande Δ relative à tout point du plan; on en déduit facilement que $\sigma(z)$ ne peut tendre uniformément vers zéro lorsque z s'éloigne à l'infini dans Δ, et par conséquent que $\sigma_t(z)$ ne peut tendre uniformément vers zéro dans Ω_n lorsque $t \to \infty$.

(1) Qui peut être le plan tout entier, comme le montre l'exemple du n° 20.

(2) On reconnaît aisément que c'est *seulement dans ces deux cas* que la circonstance précédente peut se produire, car elle équivaut à dire que la courbe C coupe tous ses rayons vecteurs sous le même angle.

fonction holomorphe ou vers l'infini. La première éventualité est impossible, car, du lemme classique de Weierstrass, on conclurait que cette suite convergerait *même au centre* et la deuxième éventualité se ramène à la première à condition de considérer, non la suite des $f_{l_n}(z)$, mais la suite des $\frac{1}{f_{l_n}(z)-a}$ qui est encore une suite de fonctions entières.

Je n'insisterai pas davantage ici sur les propriétés de l'ensemble E.

22. *Conséquences relatives aux racines des équations* $f(z)=a$. — La proposition établie au n° 17 donne un renseignement très précis sur les arguments des racines des diverses équations $f(z)=a$, quel que soit a, pour une fonction entière donnée $f(z)$, d'ailleurs quelconque.

Si l'on adopte pour C une droite passant par l'origine, la proposition disant que, dans tout angle de sommet O contenant l'une ou l'autre de certaines droites privilégiées, la fonction $f(z)$ prend toute valeur finie, sauf peut-être une seule, revient à dire, en désignant par Oz_0 une de ces droites, que les racines $z_1(a), z_2(a), z_3(a), \ldots, z_n(a), \ldots$ de l'équation $f(z)=a$ ont des *arguments qui admettent* φ_0 *pour une de leurs limites*, et cela quel que soit a, sauf peut-être une seule valeur. Sauf peut-être une valeur de a, le rayon Oz_0 est un rayon limite pour les rayons $Oz_n(a)$ ($n=1, 2, \ldots, \infty$). En particulier, il est impossible de trouver une fonction entière $f(z)$ dont les zéros aient un argument limite unique φ_0, dont les racines de $f(z)=1$ aient un argument limite unique $\varphi_1 \neq \varphi_0$ et les racines de $f(z)=a$ ($a \neq 0$ et de 1) aient un argument limite unique (1) $\neq \varphi_0$ et $\neq \varphi_1$. Si l'on construit tous les rayons limites des rayons $Oz_n(a)$ et si l'on désigne par $E(a)$ l'ensemble de ces rayons, il existe au moins un rayon commun à tous les $E(a)$, sauf peut-être un des $E(a)$ au plus.

On a des propositions analogues avec toute courbe C. La propriété de la courbe z_0C, privilégiée en position, dont l'existence a été établie

(1) Si, par exemple, les racines de $f(z)=a$ ont un rayon limite unique $O\alpha$, ou bien les racines de toute autre équation $f(z)=b$ (sauf peut-être une valeur de b) admettent $O\alpha$ pour rayon limite, ou bien toutes ces équations sans exception ont un rayon limite commun $O\beta \neq O\alpha$, pour leurs racines.

au n° 17, se traduit par ce fait que, quel que soit a (sauf peut-être une valeur finie au plus), on peut parmi les racines $z_n(a)$ de l'équation $f(z)=a$ en choisir une infinité $z_{n_1}(a), z_{n_2}(a), \ldots, z_{n_p}(a), \ldots$ telles que *le rapport entre la plus courte distance de* $z_{n_p}(a)$ *à la courbe* z_0C *d'une part, et le module de* $z_{n_p}(a)$ *d'autre part, tende vers zéro quand p augmente indéfiniment.* C'est une indication sur la façon dont on peut approcher *simultanément* des racines de $f(z)=a$ (quel que soit a) par des courbes de forme déterminée, mais d'ailleurs quelconque.

Je ne connais pas de proposition antérieure du type précédent qui renseigne sur les *arguments* des racines des équations $f(z)=a$, *quelle que soit la fonction entière* $f(z)$. Plusieurs géomètres ont étudié la *croissance des modules* des racines de ces équations en faisant sur $f(z)$ des hypothèses assez larges (1) sans que l'on soit arrivé, je crois, à des conclusions absolument générales, valables pour toute fonction entière.

23. *Note.* — Tout ce qui s'est dit dans ce paragraphe I (2) des fonctions entières est valable pour *toute fonction méromorphe* $\varphi(z)$ *ayant une valeur exceptionnelle finie a*, car la fonction $\frac{1}{\varphi(z)-a}=f(z)$ est alors une fonction entière : tout ce qu'on a dit s'applique à $f(z)$ et par suite à $\varphi(z)=\frac{1+af(z)}{f(z)}$.

II. — Les fonctions méromorphes ayant une valeur asymptotique.

24. J'entends par là toute fonction méromorphe $\varphi(z)$ qui tend vers une limite déterminée ω, finie ou infinie (3), quand z tend vers

(1) Par exemple, la régularité de la croissance.

(2) Il est à peine nécessaire de faire remarquer que les théorèmes de ce paragraphe I s'appliquent aussi à toute fonction uniforme admettant un point singulier essentiel isolé, autour duquel la fonction a une valeur exceptionnelle finie ou infinie.

(3) On peut, sans diminuer la généralité, supposer ω finie. Tout ce que nous dirons dans ce paragraphe II s'appliquera à toute fonction, uniforme autour d'un point singulier essentiel isolé, qui admet une valeur asymptotique ω lorsque z tend vers ce point sur un certain chemin Γ.

l'infini sur un certain chemin continu bien déterminé : un tel chemin est dit *chemin de détermination* ω, et ω s'appelle une valeur asymptotique. Une fonction entière quelconque admet la valeur asymptotique $+\infty$ et toute valeur exceptionnelle d'une fonction méromorphe est, comme on sait, une valeur asymptotique. [*Voir* notamment F. IVERSEN, *Thèse* (Helsingfors, 1914), et *Sur quelques propriétés des fonctions monogènes au voisinage d'un point singulier* (*Ofversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar*, Bd LVIII, 1915-1916, Afd. A, n° 25).] Je désignerai par Γ le chemin de détermination.

Il faut procéder comme pour les fonctions entières, mais raisonner avec plus de précaution, car les familles de fonctions méromorphes sont plus générales que les familles de fonctions holomorphes. C étant la courbe donnée *a priori* que décrit le point $T = \sigma(t)$ lorsque t varie de 1 à $+\infty$, on formera la famille des $\varphi_t(z) = \varphi[z\sigma(t)]$ et il s'agit de montrer que *cette famille ne peut être normale dans toute une couronne* (C_1, C_2), *d'ailleurs quelconque, entourant l'origine*. On montre, en effet, que toute suite infinie convergente extraite de la famille des $\varphi_t(z)$, si l'hypothèse précédente était vraie, devrait *converger nécessairement vers la constante* ω. Soit $\varphi_{t_1}, \varphi_{t_2}, \ldots, \varphi_{t_n}, \ldots$ cette suite, correspondant à des indices croissants $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots t_n \to \infty$. Les valeurs prises par $\varphi_{t_n}(z)$ dans la couronne (C_1, C_2) sont celles que prend $\varphi(z)$ dans la couronne $[\sigma(t_n)C_1, \sigma(t_n)C_2]$. Cette couronne tend vers l'infini quand t_n grandit indéfiniment. Mais elle est toujours traversée, du contour $\sigma(t_n)C_1$ au contour $\sigma(t_n)C_2$, par un arc continu $\alpha_n\beta_n$ au moins de la courbe Γ. Sur Γ, $\varphi(z)$ tend vers ω, donc sur l'arc précédent $\alpha_n\beta_n$ on aura

$$|\varphi(z) - \omega| < \varepsilon_n,$$

ε_n tendant vers zéro quand n et t_n grandissent indéfiniment. Revenant à la couronne (C_1, C_2), elle sera traversée du contour C_1 au contour C_2 par un arc continu $\widehat{A_nB_n} = \dfrac{\widehat{\alpha_n\beta_n}}{\sigma(t_n)}$ sur lequel on aura

$$|\varphi_{t_n}(z) - \omega| < \varepsilon_n.$$

Les arcs continus A_nB_n, dont les extrémités sont respectivement sur C_1 et C_2 ont pour ensemble limite un *ensemble continu* qui a un

point au moins sur toute courbe entourant C_1 et intérieure à C_2, qui parcourt la couronne (C_1, C_2). En tout point de cet ensemble, la valeur de la fonction $F(z)$ limite de la suite des $\varphi_{t_n}(z)$ ne peut évidemment différer de ω. $F(z)$ se réduit donc, dans toute la couronne (C_1, C_2), à la constante ω.

C'est ici le lieu de faire remarquer que ce résultat concorde avec celui trouvé pour les fonctions entières au même endroit du raisonnement. La valeur ∞ étant valeur asymptotique pour toute fonction entière $f(z)$, on a bien vu au n° 16 que toute fonction limite de la famille des $f_t(z) = f[z\sigma(t)]$ ne pouvait différer de la constante infinie, à supposer, ce qu'on a ensuite reconnu inexact, que la famille des f_t fût normale dans la couronne (C_1, C_2). Mais au n° 16 on a pu se contenter de considérations plus élémentaires, car les fonctions entières sont plus simples que les fonctions méromorphes. Le raisonnement actuel s'applique d'ailleurs mot pour mot aux fonctions entières.

Il n'y a maintenant aucune difficulté à conclure, comme au n° 16, que, t tendant vers l'infini, $\varphi_t(z)$ devrait tendre uniformément vers la constante ω dans toute la couronne (C_1, C_2) et par suite que $\varphi(z)$ devrait tendre uniformément vers ω quand z tend vers l'infini : l'inégalité $|z| > R$ devant entraîner $|\varphi(z) - \omega| < \varepsilon$ dès que R serait assez grand. C'est là une impossibilité qui montre l'inexactitude de l'hypothèse initiale (1).

25. On est donc en droit de dire, comme au n° 17, qu'il existe un point au moins z_0, dans toute couronne (C_1, C_2) entourant l'origine, où la famille des $\varphi_t(z)$ n'est pas normale. *Dans la bande* Δ *que nous savons construire à partir du point* z_0 *et d'un cercle* ω_0, *arbitrairement petit, de centre* z_0, *la fonction* $\varphi(z)$ *prendra toute valeur finie ou infinie, sauf peut-être deux valeurs exceptionnelles au plus.* Si $\varphi(z)$ admet deux valeurs exceptionnelles dans tout le plan, ce sera précisément ces deux valeurs que $\varphi(z)$ ne pourra prendre dans la bande d'ouverture infiniment petite Δ. La remarque faite précédemment vaut ici : $\varphi(z)$ prendra *une infinité de fois* dans Δ toute valeur non exceptionnelle.

(1) *Voir* un raisonnement analogue dans ma Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 168. 1919, p. 719.

Envisageant par exemple la fonction méromorphe $\operatorname{th} z = \frac{e^2 z - 1}{e^2 z + 1}$ qui admet sur l'axe réel positif la valeur asymptotique $+1$ et sur l'axe réel négatif la valeur -1, ces deux valeurs étant d'ailleurs valeurs exceptionnelles pour $\operatorname{th} z$, on reconnaît aisément, lorsque C est une droite issue de l'origine $[\sigma(t) = t]$, que la famille des $\operatorname{th} tz$ est normale en tout point situé à droite de l'axe imaginaire et tend uniformément vers $+1$ lorsque t tend vers $+\infty$; elle est normale en tout point situé à gauche de cet axe et tend uniformément vers -1 lorsque t tend vers $-\infty$. Sur l'axe imaginaire, la famille des $\operatorname{th} tz$ n'est normale en aucun point. Dans tout angle de sommet O contenant cet axe, $\operatorname{th} tz$ prend toute valeur finie ou infinie à l'exclusion des deux valeurs $+1$ et -1. *Sur l'axe imaginaire*, $\operatorname{th} z$ *ne prend que des valeurs purement imaginaires* dont le module varie périodiquement de $-\infty$ à $+\infty$. Conclusions analogues pour la fonction $\operatorname{tang} z = -i \operatorname{th} iz$. Ici les deux valeurs exceptionnelles sont $+i$ et $-i$, ce sont les valeurs limites vers lesquelles tend respectivement $\operatorname{tang} z$ quand z s'éloigne à l'infini sur un rayon du demi-plan supérieur ou du demi-plan inférieur. C'est en tout point de l'axe réel que la famille des fonctions $\operatorname{tang} tz$ cesse d'être normale, sur cet axe, la fonction $\operatorname{tang} z$ varie périodiquement de $-\infty$ à $+\infty$ en restant réelle, alors que, dans tout angle contenant l'axe réel, $\operatorname{tang} z$ prend une infinité de fois toute valeur excepté $+i$ et $-i$.

26. Un autre exemple intéressant est fourni par la fonction elliptique classique $\zeta(z)$ — Si $2\omega_1$ et $2\omega_2$ sont ses périodes, on a les relations

$$\zeta(z + 2\omega_1) = \zeta(z) + 2\eta_1,$$
$$\zeta(z + 2\omega_2) = \zeta(z) + 2\eta_2;$$

$\zeta(z)$ a pour pôles simples tous les points

$$W = 2h_1\omega_1 + 2h_2\omega_2, \qquad h_1, h_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Dans un parallélogramme P de périodes de centre O, $\zeta(z)$ prend des valeurs qui recouvrent toute la partie infinie du plan ζ, extérieure à une certaine courbe fermée (parallélogramme curviligne), que décrit le point ζ quand z décrit le contour du parallélogramme de périodes. On déduit alors de la relation

$$\zeta(z + 2\omega_1) = \zeta(z) + 2\eta_1$$

que dans le parallélogramme D, couvert par un nombre fini N de parallélogrammes accolés, dont le premier serait P, et qui se déduiraient de P par N translations successives équipollentes au vecteur période $2\omega_1$, la fonction $\zeta(z)$ prend toute valeur finie ou infinie. Par suite, dans tout parallélogramme *équipollent à* D, formé de N parallélogrammes de périodes, accolés comme ceux de D, $\zeta(z)$ prendra toute valeur finie ou infinie. Prenant pour C une courbe *quelconque du plan* allant à l'infini, décrite par le point $T = \sigma(t)$ pour t variant de 1 à $+\infty$, on voit que la famille des $\zeta[z\sigma(t)] = \zeta_t(z)$ *ne saurait être normale en aucun point du plan.*

Effectivement, l'infini est une valeur asymptotique de $\zeta(z)$ vers laquelle $\zeta(z)$ tend quand z tend vers l'infini sur une droite *parallèle à un vecteur période quelconque.* Si l'on suppose que, dans un petit cercle $\mathfrak{D}_0$ du plan, la famille des $\zeta[z\sigma(t)]$ soit normale, il est clair que, pour t assez grand, le cercle $\mathfrak{D}_0\sigma(t)$ étant arbitrairement grand et contenant un nombre de parallélogrammes de périodes arbitrairement élevé, le nombre des pôles qu'une fonction de la famille possède dans $\mathfrak{D}_0$ dépasse toute limite quand t grandit indéfiniment. Si une suite infinie de fonctions de la famille correspondant à des indices

$$t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n < \ldots t_n \to \infty$$

convergeait dans $\mathfrak{D}_0$, elle ne pourrait converger que vers l'infini. Et la famille des $\zeta_t(z)$ étant supposée normale, dans $\mathfrak{D}_0$, la convergence serait uniforme. Cependant, dès que t_n dépasse une certaine limite, le cercle $\mathfrak{D}_0\sigma(t_n)$ étant arbitrairement grand contiendra à son intérieur un parallélogramme D, $\zeta(z)$ prendra dans $\mathfrak{D}_0\sigma(t_n)$ toute valeur finie ou infinie, en particulier la valeur zéro. Toute fonction $\zeta_{t_n}(z)$ de la suite précédente, dès que t_n surpassera une certaine limite finie, prendra donc dans $\mathfrak{D}_0$ toute valeur finie ou infinie, en particulier zéro. Les fonctions de la suite ... peuvent dans $\mathfrak{D}$ tendre uniformément vers l'infini : *la famille des $\zeta_t(z)$ ne saurait être normale en aucun point du plan.*

Dans toute bande Δ, *d'ouverture infiniment petite, ayant pour axe une courbe* C *quelconque du plan,* $\zeta(z)$ *prend toute valeur finie ou infinie, une infinité de fois.*

27. On peut encore faire ici les mêmes remarques qu'au n° 19 et au n° 20, ces remarques s'appuieront sur les exemples qu'on vient de donner aux n^{os} 25 et 26 du présent paragraphe. Parallèlement au n° 21, on pourra, dans le cas qui nous occupe, parler de l'ensemble des points où la famille des $\varphi_t(z) = \varphi[z\sigma(t)]$ n'est pas normale. C'est un ensemble fermé et il contient un continu qui coupe toute courbe fermée entourant l'origine en un point au moins : c'est le sens du théorème démontré au n° 25. On peut affirmer aussi que lorsque la fonction méromorphe admet deux valeurs exceptionnelles finies ou infinies, l'ensemble E est *parfait*. Il est clair que E dépend de la courbe C choisie; il peut être linéaire (exemple de tang z donné au n° 25) ou superficiel [exemple de $\zeta(z)$].

Enfin, ce qu'on a dit au n° 22 des racines des équations $f(z) = a$, pour une fonction entière quelconque, s'applique aux racines des équations $\varphi(z) = a$ (a fini ou infini) pour toute fonction méromorphe $\varphi(z)$ ayant au moins une valeur asymptotique. Je me bornerai donc à y renvoyer le lecteur. Il suffira, au lieu d'admettre une seule valeur exceptionnelle a au plus comme pour les fonctions entières, d'en admettre deux distinctes (dont l'une peut être infinie) au plus.

28. On peut aussi étudier *les valeurs que prend une fonction méromorphe $\varphi(z)$ ayant une valeur asymptotique ω, au voisinage du chemin Γ sur lequel $\varphi(z)$ tend vers la limite ω.* z_0 étant un point quelconque de ce chemin, il est loisible de supposer que la fonction complexe $\sigma(t)$ de la variable réelle t a été choisie telle que, t variant de 1 à $+\infty$, le point $z_0\sigma(t)$ décrive la courbe Γ, du point z_0 à l'infini, toujours dans le même sens. On formera la famille des fonctions $\varphi_t(z) = \varphi[z\sigma(t)]$: deux cas sont possibles, ou bien cette famille est normale au point z_0, ou bien elle ne l'est pas.

1° Si *la famille est normale en z_0*, elle l'est dans un certain cercle ω_0 de centre z_0 qu'on choisira le plus grand possible. Lorsque z décrit ce cercle ω_0, $z\sigma(t)$ décrit un cercle $\omega_0\sigma(t)$ dont le centre $z_0\sigma(t)$ est fixe sur Γ et dont le rayon est à celui de D_0 dans le rapport $|\sigma(t)|$. Ce cercle est traversé par la courbe Γ qui passe en son centre. Extrayons de la famille des $\varphi_t(z)$ une suite infinie correspondant aux indices

indéfiniment croissants

$$t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n < \ldots t_n \to \infty.$$

Tout cercle $\mathfrak{D}_0\sigma(t_n)$, traversé par Γ, est parcouru par un arc de Γ que j'appellerai $\alpha_n\beta_n$ et qui passe en son centre $z_0\sigma(t_n)$. J'appellerai A_nB_n l'arc $\frac{\alpha_n\beta_n}{\sigma(t_n)}$.

C'est un arc semblable à l'arc $\alpha_n\beta_n$, qui traverse le cercle $\mathfrak{D}_0$ en passant par son centre z_0. Sur A_nB_n on a, dès que t_n est assez grand,

$$|\varphi_{t_n}(z) - \omega| < \varepsilon_n,$$

ε_n tendant vers zéro quand t_n croît indéfiniment.

Toute suite infinie d'arcs choisis parmi les arcs A_nB_n admet un ensemble limite continu intérieur au cercle $\mathfrak{D}_0$, cet ensemble limite possédant au moins un point sur tout cercle de centre z_0, intérieur à $\mathfrak{D}_0$. En tout point de cet ensemble, la limite des $\varphi_{t_n}(z)$ ne peut différer de ω; *elle est donc identique à la constante* ω *dans tout le cercle* $\mathfrak{D}_0$. Toute fonction limite de la famille des $\varphi_t(z)$ étant identique à ω, on conclut que, lorsque t tend vers l'infini, la fonction $\varphi_t(z)$ tend uniformément vers ω à l'intérieur du cercle $\mathfrak{D}_0$, ce qui signifie que $\varphi(z)$ *tend uniformément vers* ω *lorsque* z *tend vers l'infini en restant à l'intérieur de la bande* Δ d'axe Γ balayée par le cercle $\mathfrak{D}_0\sigma(t)$ au cours du mouvement avec déformation que l'on a appris à lui imprimer.

Si l'on considère les racines $z_n(a)$ d'une équation quelconque $\varphi(z) = a$ $(a \neq \omega)$, on peut affirmer qu'à partir d'une certaine valeur n_a de n, elles sont toutes extérieures à la bande Δ; cette valeur peut dépendre, naturellement, de a; mais il est certain que, quelle que soit la valeur a telle que $|a - \omega| > \varepsilon$, ε étant donné positif et arbitraire, on pourra déterminer un cercle de centre O assez grand pour qu'*à l'extérieur de ce cercle aucune racine d'une équation* $\varphi(z) = a$ *ne soit intérieure à la bande* Δ.

2° Si, au contraire, *la famille des* $\varphi_t(z)$ *n'est pas normale en* z_0, quelque petit que soit le rayon de $\mathfrak{D}_0$, et par conséquent quelque étroite que soit la bande Δ correspondante, la fonction $\varphi(z)$ prendra, dans Δ, toute valeur finie ou infinie, sauf peut-être deux valeurs au plus. *Le chemin* Γ *sera donc limite pour les racines de toute équation* $\varphi(z) = a$

(sauf deux valeurs a finies ou infinies au plus) en ce sens que le rapport entre la plus courte distance d'une racine $z_n(a)$ à Γ et le module $|z_n(a)|$ de cette racine tendra vers zéro pour une suite infinie convenable n_1, n_2, ..., n_p, ..., de ces racines (¹).

III. — Les fonctions méromorphes sans valeur asymptotique.

29. Tout ce qui précède, dans les paragraphes I et II de ce Chapitre, suppose que la fonction méromorphe étudiée possède au moins une valeur asymptotique (une fonction entière est une fonction méromorphe particulière dont l'infini est une valeur exceptionnelle). Supposer qu'une fonction $\varphi(z)$ n'a pas de valeur asymptotique, c'est supposer que sa fonction inverse n'a pas de singularités transcendantes et n'admet dans tout le plan à distance finie ou infinie que des points critiques algébriques ou des pôles. Ceci se déduit immédiatement des travaux connus sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes pour lesquels on pourra consulter par exemple la thèse de M. Iversen. Si l'on construit la surface de Riemann Σ sur laquelle la fonction $z = \psi(W)$, inverse de la fonction méromorphe $W = \varphi(z)$, est uniforme, il est clair que chaque feuillet de cette surface ne saurait être relié directement qu'à un *nombre fini* d'autres feuillets, et par un nombre fini de points de ramification algébriques : chaque feuillet peut ainsi être isolé des autres par un nombre fini de coupures qui rendront uniforme la détermination de $z(W)$ correspondant à ce feuillet. On pourra toujours relier ces coupures entre elles de façon à n'en plus former qu'une seule. Lorsque W décrit le *feuillet ainsi coupé*, z décrit une aire d'un seul tenant, simplement connexe lorsque toutes les coupures ont été reliées en une seule, et *tout entière à distance finie* puisque, $z(W)$ n'ayant pas de point transcendant, z ne peut aucunement tendre vers l'infini quand W tend vers un point déterminé du *feuillet coupé*. On voit ainsi que *le plan des z pourra toujours être décomposé en une infinité de polygones*, dont chacun est la représentation conforme d'un feuillet de la surface de Riemann de $z(W)$; tous ces polygones

(¹) *Voir* un raisonnement analogue dans ma Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 168, 1919, p. 812

sont à distance finie, deux à deux contigus et remplissent tout le plan sans omission ni répétition; *dans chacun de ces polygones la fonction méromorphe* $\varphi(z)$ *prend toute valeur finie ou infinie* (¹). Cette proposition remplace ici la proposition du n° 25 pour les fonctions douées de valeur asymptotique. Elle est en particulier vérifiée par les fonctions doublement périodiques qui n'ont aucune valeur asymptotique, on le reconnaît aisément, et, pour ces fonctions, les polygones précédents ne sont autres que les parallélogrammes de périodes, ou plutôt des portions de parallélogrammes des périodes, car toute fonction elliptique prend deux fois au moins dans chaque parallélogramme des périodes toute valeur finie ou infinie.

30. On peut aussi appliquer la méthode des familles normales utilisée dans les paragraphes I et II aux fonctions méromorphes générales qui nous occupent actuellement; mais pour rechercher les points où la famille cesse d'être normale on aura recours à d'autres considérations qu'à celles tirées de valeurs asymptotiques, on utilisera par exemple la croissance, la distribution des zéros et des pôles dans le plan (²). En voici un exemple bien simple emprunté aux fonctions elliptiques. Prenant une fonction doublement périodique quelconque $\varphi(z)$ et une courbe C quelconque correspondant à la fonction $\sigma(t)$ on formera la famille $\varphi_t(z) = \varphi[z\sigma(t)]$. ω_0 étant un cercle quelconque du plan, dès que t sera assez grand, le cercle $\omega_0\sigma(t)$ sera aussi grand qu'on voudra et contiendra un nombre de parallélogrammes de périodes aussi grand qu'on voudra. Si la famille des φ_t était normale dans ω_0, toute suite convergente qu'on en pourrait extraire devrait d'une part converger uniformément vers zéro puisque les zéros de φ_t dans ω_0 se rapprochent indéfiniment les uns des autres en même temps que leur nombre grandit indéfiniment quand t grandit indéfiniment; elle devrait

(¹) Voir *Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 168, 1919, p. 719.

(²) Il semble que, dans chaque cas, la nature de la fonction méromorphe doive faire choisir le mode qu'il convient d'adopter : on sera conduit à étudier le nombre des zéros et celui des pôles intérieurs à un anneau $(R, R\sigma)$ $(\sigma > 1)$. Lorsque R grandit indéfiniment d'une façon continue, on en tirera des conséquences sur la question de savoir si la famille des $\varphi_t(z)$ est ou n'est pas normale dans l'anneau $(R_0, R_0\sigma)$. Voir d'ailleurs la suite au n° 32 du présent Mémoire.

d'autre part converger uniformément vers l'infini puisque ce qu'on a dit des zéros de φ_t est vrai des pôles. Donc la famille des $\varphi_t(z)$ *ne saurait être normale en aucun point du plan* z, et cela quelle que soit la courbe C. Dans toute bande Δ, si petite que soit son ouverture, φ prend une infinité de fois toute valeur finie ou infinie, ce qui n'a rien d'étonnant puisque le rayon du cercle générateur $\omega_0\sigma(t)$ grandissant indéfiniment avec t, Δ contient toujours une infinité de parallélogrammes de périodes.

31. Voici encore ce qu'on peut dire des valeurs d'une fonction méromorphe quelconque $\varphi(z)$ au voisinage d'un chemin Γ, allant à l'infini et d'ailleurs quelconque, lorsqu'on suppose que, z *décrivant ce chemin, le point* $w = \varphi(z)$ *ne se rapproche pas indéfiniment de tout point du plan* w, c'est-à-dire que la courbe décrite par w *n'est pas dense dans tout le plan*. L'hypothèse actuelle est moins restrictive que celle qu'on a adoptée au n° 28; comme il a été fait au n° 28, on formera la famille des fonctions $\varphi_t(z) = \varphi[z\sigma(t)] : z_0$ étant un point fixe quelconque de Γ, le point $z_0\sigma(t)$ décrira Γ lorsque t variera de 1 à $+\infty$. Deux hypothèses sont possibles : ou bien la famille des $\varphi_t(z)$ est normale au point z_0, ou bien elle ne l'est pas.

1° Si la famille est normale au point z_0, et si l'on désigne par A une valeur telle que $|\varphi(z) - A|$ reste $> \varepsilon$, sur tout Γ, c'est-à-dire une valeur dont $\varphi(z)$ ne se rapproche pas indéfiniment sur Γ, la famille des $\frac{1}{\varphi_t(z) - A}$ sera bornée en z_0 : normale en z_0 comme la famille des $\varphi_t(z)$ elle sera uniformément bornée dans un certain cercle ω_0 de centre z_0, ce qui veut dire en somme que dans une certaine bande Δ engendrée par le cercle $\omega_0\sigma(t)$ quand t varie de 1 à $+\infty$ on aura $\left|\frac{1}{\varphi(z) - A}\right| < M$, l'épaisseur de la bande Δ (caractérisée par le rayon de ω_0) étant, bien sûr, fonction de ε et de A. Ceci veut dire que si, sur Γ, $\varphi(z)$ ne s'approche pas indéfiniment d'une certaine valeur A, il existe *toute une bande* Δ, *d'axe* Γ, *dans laquelle* $\varphi(z)$ *reste également à distance finie de* A, et ceci est vrai quelle que soit la valeur A dont $\varphi(z)$ reste à distance finie, sur Γ. En particulier, dès que $|z|$ dépasse une certaine limite R_1 la bande Δ ne contiendra aucune racine de l'équation $\varphi(z) = A$.

Autrement dit encore, les racines de l'équation $\varphi(z) = A$ ne sauraient avoir pour limite la courbe Γ, au sens déjà attribué à cette expression (n° 28, 2°).

2° Si, au contraire, la famille des φ_t n'est pas normale au point z_0 la conclusion est la même qu'au n° 28 (2°), le chemin Γ est limite pour les racines de toute équation $\varphi(z) = a$, sauf peut-être deux valeurs de a, finies ou infinies, au plus.

32. Je voudrais, en terminant, montrer que l'*hypothèse générale dans laquelle on s'est placé au paragraphe* II *pour établir le théorème du n° 25 n'est pas un pur artifice de démonstration.* C'est-à-dire que si on l'abandonne, le théorème peut n'être plus vrai. Je vais le montrer en fournissant l'exemple d'une fonction $f(z)$, uniforme, qui admet l'infini et l'origine pour points singuliers essentiels isolés, qui n'admet *aucune valeur asymptotique* lorsque z tend vers l'infini (ou vers l'origine), et pour laquelle la famille des fonctions $f_t(z) = f(zt)$, qui correspond à $\sigma(t) = t$ (1), (la courbe C étant un rayon issu de l'origine) est *normale autour de tout point du plan, excepté à l'origine.*

On s'adresse à une fonction doublement périodique $\varphi(Z)$ dont les périodes sont $2\pi i$ et a (a nombre réel positif) (2), et l'on pose

$$f(z) = \varphi(\log z).$$

La période $2\pi i$ de $\varphi(Z)$ rend $f(z)$ uniforme dans tout le plan, o et ∞ étant points singuliers essentiels isolés de $f(z)$; $f(z)$ est tel que

$$f(ze^a) = f(z),$$

$f(z)$ pas plus que $\varphi(Z)$ n'a de valeur asymptotique. Formons la famille

$$f_t(z) = f(zt) = \varphi(\log z + \log t) = \varphi(Z + \log t) = \varphi_t(Z),$$

(1) On pourrait remplacer C par une infinité de spirales logarithmiques convenables de pôle O, chacune de ces spirales correspondant à $\sigma(t) = \sigma^{t-1}$ et σ étant un nombre complexe tel que $\log\sigma$ soit le produit d'une *période quelconque* de $\varphi(Z)$ par un nombre *réel*, de telle façon que le vecteur $\log\sigma$ soit parallèle à un vecteur période.

(2) Si la période a n'était pas réelle, on prendrait pour courbe C une spirale logarithmique convenable au lieu d'un rayon; par exemple $\sigma(t) = \sigma^{t-1}$, σ étant tel que $\frac{\log\sigma}{a}$ soit réel.

t variant de 1 à $+\infty$, $\log t$ varie de 0 à $+\infty$. Lorsque z décrit un petit cercle ω_0 ne contenant pas l'origine, Z décrit dans son plan une petite aire D simplement connexe, intérieure à un parallélogramme de périodes de la fonction $\wp(Z)$, et lorsque t varie, $Z + \log t$ décrit une petite bande D_1 parallèle à l'axe réel, et comprise entre les deux tangentes à l'aire D, parallèle à cet axe réel, qui comprennent entre elles l'aire D.

Or, si le rayon de ω_0 est assez petit, l'aire D est arbitrairement petite, et la bande D_1, *parallèle à une période de* $\wp$, est arbitrairement étroite. Dans cette bande, $W = \wp(Z)$ ne prend que des valeurs contenues dans une bande fermée du plan W d'épaisseur arbitrairement petite : il nous suffit de savoir qu'il y a une infinité de valeurs (formant des aires) que la fonction $\wp(Z)$ ne peut prendre dans la bande D_1, que les $\wp_i(Z)$ ne peuvent prendre dans l'aire D, et par conséquent que les $f_i(z)$ ne prennent pas dans l'aire ω_0. Ces fonctions $f_i(z)$ forment donc une famille normale en tout point du plan z. Lorsque z décrit un rayon fixe quelconque OU allant de 0 à $+\infty$ le point $W = f(z)$ décrit périodiquement une infinité de fois une certaine courbe analytique fermée ε (qui peut d'ailleurs passer par le point à l'infini du plan W). Lorsque z décrit un angle U_1OU_2 assez petit contenant le rayon considéré, $W = f(z)$ décrira périodiquement une bande fermée limitée par deux courbes analytiques ε_1 et ε_2 qui encadrent la courbe ε. Lorsque l'ouverture de l'angle U_1OU_2 tend vers zéro, les deux courbes ε_1 et ε_2 tendent vers la courbe ε. Lorsque l'ouverture de l'angle U_1OU_2 grandit jusqu'à atteindre 2π, la bande comprise entre ε_1 et ε_2 s'élargit indéfiniment jusqu'à recouvrir le plan des w tout entier un nombre de fois égal à l'*ordre* de la fonction doublement périodique $\wp(Z)$.

SUR LA NOTION

DE

NOMBRE CARACTÉRISTIQUE DE M. LIAPOUNOFF

PAR M. ÉMILE COTTON,

Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Grenoble.

INTRODUCTION.

M. Liapounoff, dans son Mémoire bien connu : *Problème général de la stabilité du mouvement*, a introduit, en 1892, dans la Science la notion de nombre caractéristique d'une fonction réelle ou imaginaire $f(t)$, la variable t étant réelle et tendant vers $+\infty$: ce nombre sert à estimer, par comparaison avec la fonction exponentielle, e^t, la rapidité avec laquelle $f(t)$ tend vers zéro (nombre caractéristique positif) ou devient infinie (nombre caractéristique négatif).

On doit, d'autre part, à M. Borel l'idée de noter la croissance d'une fonction positive et réelle $F(x)$ de la variable réelle x par un ensemble (p, q) de deux nombres, qui sont les limites extrêmes d'indétermination, pour x tendant vers $+\infty$, du rapport $\log F(x) : \log x$.

Au début de ce Mémoire (n^{os} 1, 2), je montre comment ces deux notions se relient l'une à l'autre; le nombre caractéristique de M. Liapounoff changé de signe est égal au plus grand, q, des deux nombres p, q définissant l'ordre (p, q) de la fonction $F(x) = |f(\log x)|$ par rapport à la nouvelle variable x liée à l'ancienne par la relation $x = e^t$. Au nombre p correspond de même ce que j'appelle le « nombre caractéristique supérieur de la fonction $f(t)$ ». On peut du reste (n° 3) adopter des fonctions de comparaison autres que la fonction exponentielle.

Le nombre caractéristique d'une suite, fonction définie seulement pour les valeurs entières de la variable, est égal au logarithme du

rayon de convergence de la série de Taylor ayant pour coefficient les termes de cette suite. Cette analogie amène à rapprocher les premiers théorèmes de M. Liapounoff de propriétés bien connues des séries entières (n^os 4, 5). La proposition concernant le nombre caractéristique d'une intégrale peut, toutefois, être remplacée par un énoncé plus précis quand il s'agit des suites (n° 6). Dans les numéros suivants (7 à 11), cette même proposition est complétée soit par l'emploi de l'intégration par parties, soit par l'usage de la notion généralisée de nombre caractéristique. Les exemples indiqués, et particulièrement ceux qui permettent de déterminer l'existence et la frontière de convergence du domaine de certaines intégrales (extension des fonctions déterminantes de Laplace étudiées plus récemment par M. Pincherle) montrent bien l'intérêt de ces propositions. Les nombres caractéristiques généralisés d'une suite (n^os 12, 13) donnent lieu à des propositions analogues qu'il serait facile d'appliquer aux séries de Dirichlet et à leurs généralisations.

Un second Chapitre concerne l'étude des nombres caractéristiques ordinaires ou généralisés d'un ensemble de fonctions; ils sont utiles pour l'étude asymptotique des solutions des systèmes différentiels linéaires. Quand on passe aux suites, les notions correspondantes sont celles du rayon de convergence de n séries de Taylor et des systèmes d'équations linéaires de récurrence déterminant les coefficients de rang $i+1$ en fonction de ceux de rang i. Les n^2 coefficients de ce système sont supposés variables avec i; on les suppose bornés, ainsi que l'inverse du déterminant qu'ils forment; dans ces conditions, il y a au plus n rayons de convergence distincts pour l'ensemble des séries de Taylor associées aux solutions de ce système (n° 14); c'est la généralisation d'une proposition bien connue de Poincaré. L'analogie entre équations différentielles et équations de récurrence se poursuit plus loin encore (n^os 15 à 17); soient, par exemple, $y(i)$, $z(i)$, ... une solution d'un système linéaire du type considéré par M. Liapounoff; considérons les suites $y_i = y(i\mathrm{T})$, $z_i = z(i\mathrm{T})$, ... obtenues en prenant les valeurs numériques de ces fonctions pour des valeurs de la variable en progression arithmétique. Le nombre caractéristique c de la solution $y(i)$, $z(i)$, ... est $\frac{1}{\mathrm{T}}\log \mathrm{R}$, R étant le rayon

de convergence de l'ensemble des séries de Taylor $\Sigma y_i x^i$, $\Sigma z_i x^i$, ...; et l'ordre de l'ensemble de ces séries sur leur cercle de convergence est, de même, étroitement lié au nombre caractéristique par rapport à t de l'ensemble des produits $e^{\alpha t} y(t)$, $e^{\alpha t} z(t)$, ... Le premier de ces résultats généralise la règle bien connue de calcul des exposants caractéristiques des systèmes différentiels linéaires à coefficients périodiques.

Les notions de systèmes normaux de solutions d'un système différentiel linéaire, de systèmes différentiels réguliers ou réductibles, introduites par M. Liapounoff, ont leurs analogues (nos 18 à 20) dans le cas des systèmes d'équations linéaires de récurrence.

Il en est de même de l'application des nombres caractéristiques à l'étude des solutions asymptotiques d'un système différentiel non linéaire. Étant donné un système E d'équations de récurrence non linéaires, dont on connaît une solution particulière, on peut déterminer les solutions voisines de celle-là en formant d'abord un système V d'équations linéaires analogues aux équations des variations de Poincaré (n° 21). Cela permet de construire un système d'équations aux sommes (analogues aux systèmes d'équations intégrales du type Volterra) déterminant les solutions de E, asymptotiques à la solution inconnue. L'existence de ces solutions se trouve établie dans le présent travail (nos 22, 23) en supposant les équations réductibles; elle s'étendrait vraisemblablement à un domaine plus vaste. Elle généralise une partie des intéressants résultats obtenus par le regretté S. Lattès pour les équations de récurrence à coefficients constants.

On voit, par le résumé qui vient d'en être donné, que le présent Mémoire a pour but de montrer l'importance de la notion de nombre caractéristique dans des domaines très variés (1).

---

(1) Indiquons, en passant, deux questions qui n'ont pas été abordées dans ce travail : Dans le cas des équations linéaires à coefficients périodiques, les nombres caractéristiques sont les parties réelles changées de signe des exposants caractéristiques. Il serait intéressant, d'une part, de chercher, pour des équations linéaires plus générales, ce qui peut correspondre aux coefficients du symbole i des imaginaires et, d'autre part, d'établir pour les nombres caractéristiques correspondant aux équations aux variations des problèmes de Mécanique, construites en partant d'une solution quelconque, des propriétés

CHAPITRE PREMIER.

1. Nombre caractéristique. — M. Liapounoff (1) a fait correspondre un nombre, appelé par lui *nombre caractéristique*, à toute fonction $f(t)$ réelle ou complexe de la variable t. Ce nombre est la borne supérieure des nombres réels λ tels que $e^{\lambda t} f(t)$ tende vers zéro quand t devient infini par valeurs positives; c'est aussi la borne inférieure des nombres μ tels que $e^{\mu t} f(t)$ ne soit pas borné (on dit aussi soit illimité) quand t devient infini positif.

On peut donner de ce nombre une troisième définition :

Le nombre caractéristique changé de signe d'une fonction $f(t)$ est la plus grande limite, pour t infini positif de

$$\frac{\log|f(t)|}{t}.$$

En effet, si d'abord le produit $e^{\lambda t} f(t)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{t}$, il en est de même de $e^{\lambda t}|f(t)|$ et le logarithme réel de ce produit

$$\lambda t + \log|f(t)| = t\left\{\lambda + \frac{\log|f(t)|}{t}\right\}$$

est nécessairement négatif; donc

$$-\lambda > \frac{\log|f(t)|}{t}$$

pourvu que t soit assez grand. Soit l le nombre caractéristique de $f(t)$, $-l$ est supérieur ou égal à la plus grande limite de

$$\frac{\log|f(t)|}{t}.$$

---

généralisant celles que M. Poincaré et M. Liapounoff ont énoncées pour les exposants caractéristiques relatifs aux solutions périodiques.

(1) Le Mémoire fondamental de M. Liapounoff : *Problème général de la stabilité du mouvement*, a paru en 1892, en langue russe, dans les *Mémoires de la Société mathématique de Karkoff*. Une traduction française de ce Mémoire, due à M. E. Davaux, a été publiée en 1907 dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (2e série, t. IX). Les propositions de M. Liapounoff sont indiquées dans le présent travail par des renvois à cette traduction.

En second lieu, si $f(t)e^{\mu t}$ n'est pas borné quand t devient infini positif, il existe des valeurs de t aussi grandes qu'on veut, telles que $e^{\mu t}|f(t)|$ soit supérieur à un nombre donné supérieur à l'unité; pour ces valeurs de t

$$-\mu < \frac{\log|f(t)|}{t},$$

$-l$, borne supérieure des nombres μ, est inférieur ou égal à la plus grande limite de

$$\frac{\log|f(t)|}{t}.$$

En rapprochant ces deux résultats, il vient

$$-l = \overline{\lim_{t=+\infty}} \frac{\log|f(t)|}{t}.$$

C'est ce qu'il fallait établir (¹).

Soit $-L$ la plus petite limite du quotient précédent

$$-L = \underline{\lim_{t=+\infty}} \frac{\log|f(t)|}{t}.$$

On voit immédiatement que

$$L = \overline{\lim_{t=+\infty}} \left\{ \frac{1}{t} \log \frac{1}{|f(t)|} \right\},$$

L *est donc le nombre caractéristique, changé de signe, de* $\frac{1}{f(t)}$; quel que soit le nombre positif ε, les quotients

$$\frac{e^{-L+\varepsilon t}}{f(t)} \quad \text{et} \quad \frac{e^{-L-\varepsilon t}}{f(t)}$$

sont respectivement évanouissant et non borné; et *par suite* $e^{(L+\varepsilon)t}f(t)$ *devient infini* (²) *quand* t *devient infini positif et* $e^{(L-\varepsilon)t}f(t)$ *passe, quel que grand que soit* t, *par des valeurs aussi voisines de zéro qu'on le veut.*

Ce nombre L sera appelé *nombre caractéristique supérieur de la fonc-*

(¹) *Voir* dans le Mémoire de Liapounoff la remarque du haut de la page 226.

(²) Ces mots doivent être entendus au sens habituel : au nombre N donné, si grand soit-il, on peut faire correspondre t_0 tel que pour les valeurs de $t > t_0$ on ait

$$e^{(L+\varepsilon)t}|f(t)| > N.$$

tion $f(t)$; pour qu'il soit fini, il faut (mais il ne suffit pas nécessairement) que $f(t)$ ne s'annule plus pour des valeurs assez grandes de t (1).

Par exemple, pour la fonction

$$e^t \sin^2 t + e^{-t} \cos^2 t,$$

le nombre caractéristique supérieur est $+1$, le nombre caractéristique de Liapounoff est -1.

Le nombre caractéristique supérieur L d'une fonction $f(t)$ ne peut pas être plus petit que le nombre caractéristique ordinaire l de cette même fonction; ces deux nombres peuvent être égaux; l'expression

$$\frac{\log|f(t)|}{t}$$

tend alors vers une limite et inversement (lemme VI).

Supposons-les différents; pour tout nombre λ inférieur à l le produit $e^{\lambda t} f(t)$ tend vers zéro quand t devient infini positif; pour tout nombre μ supérieur à L, le produit $e^{\mu t} f(t)$ devient infini dans les mêmes conditions; enfin, pour tout nombre ν inférieur à L et supérieur à l, il existe des valeurs de t supérieures à tout nombre t_0 donné à l'avance, telles que $e^{\nu t}|f(t)|$ surpasse un nombre N, si grand soit-il, et il existe aussi des valeurs de $t > t_0$ telles que ce produit soit inférieur à un nombre positif donné η, si petit qu'on l'ait choisi.

2. Nombres caractéristiques et ordres parenthèses. — Une fonction $f(t)$ peut être considérée comme fonction de $x = e^t$, on a $t = \log x$ et

$$f(t) = f[\log(x)] = f_1(x).$$

La fonction

$$F(x) = |f_1(x)|$$

est par rapport à la variable $x = e^t$ d'un ordre parenthèse (2) (p, q),

(1) M. Liapounoff a utilisé ce nombre (lemmes VI, VII, p. 227; n° 9, p. 237) sans lui donner de nom spécial.

(2) Cette notion est due à M. Émile Borel, *Leçons sur la Théorie de la croissance*, 1910, p. 35.

les nombres p et q étant définis par les égalités :

$$p = \varliminf_{x=+\infty} \frac{\log F(x)}{\log x} = \varliminf_{x=+\infty} \frac{\log|f(t)|}{t};$$
$$q = \varlimsup_{x=+\infty} \frac{\log F(x)}{\log x} = \varlimsup_{x=+\infty} \frac{\log|f(t)|}{t};$$

il en résulte que $L = -p$, $l = -q$; *le nombre caractéristique et le nombre caractéristique supérieur sont ainsi rattachés à la théorie de M. Borel.*

Nous élargissons toutefois un peu en procédant ainsi le domaine d'application de cette théorie; M. Borel (*loc. cit.*, p. 16) suppose les fonctions qu'il étudie réelles positives et infiniment grandes (les fonctions monotones se ramènent à ce cas et aussi les fonctions réelles quelconques par la considération des enveloppes d'indétermination de P. du Bois-Reymond). En appliquant directement, comme nous venons de le faire, le mode de comparaison de M. Borel à la fonction $F(x)$ qui n'est pas nécessairement monotone, ni même réelle, et qui peut tendre vers zéro, nous pouvons avoir à considérer des nombres p et q de signes quelconques : alors qu'avec les restrictions de M. Borel, p et q ne peuvent pas être négatifs (*loc. cit.*, p. 35).

Bien que les deux notions de M. Liapounoff et de M. Borel soient au fond équivalentes, il nous sera plus commode, dans ce qui suit, de parler de nombres caractéristiques et non d'ordres parenthèses pour ne pas compliquer les énoncés par l'indication des changements de signes.

3. Extension des notions précédentes. — On peut étendre les notions d'ordre parenthèse, de nombre caractéristique supérieur en utilisant des fonctions de comparaison autres que la fonction exponentielle. Soit $\theta(t)$ une fonction positive et croissante de la variable réelle t devenant infinie avec t, et $f(t)$ une fonction quelconque de t. Considérons la plus petite limite p et la plus grande limite q du rapport

$$\frac{\log|f(t)|}{\log\theta(t)}$$

lorsque t tend vers $+\infty$; nous dirons que (p, q) est l'ordre de $|f(t)$

par rapport à la variable $x = \theta(t)$, que — *q est le nombre caractéristique inférieur* (1) *et — p le nombre caractéristique supérieur de $f(t)$ par rapport à la fonction de comparaison* $\theta(t)$.

Ces notions (2) se ramènent du reste aux précédentes par le changement de variable $u = \log\theta(t)$; il peut évidemment être commode de ne pas effectuer ce changement de variable et de conserver une fonction de comparaison distincte de la fonction exponentielle.

Dans les numéros suivants, il s'agit, sauf indication contraire, des nombres caractéristiques de Liapounoff.

4. Nombre caractéristique d'une suite et rayon de convergence d'une série de Taylor. — La définition du nombre caractéristique est applicable sans que la fonction soit donnée pour toutes les valeurs de t; on peut considérer $f(t)$ comme définie seulement pour les nombres t d'un ensemble E non borné supérieurement. Prenons alors pour E l'ensemble des entiers n et écrivons a_n au lieu de $f(n)$.

Le nombre caractéristique de a_n est égal au logarithme du rayon de convergence de la série de Taylor $\Sigma a_n x^n$ associée à la suite a_n (3).

En effet, d'après le théorème d'Abel, ce rayon de convergence R est la borne supérieure des nombres X réels et positifs tels que $a_n X^n$ tende vers zéro pour n infini positif; en posant $X = e^\lambda$ ou $\lambda = \log X$, $l = \log R$ est la borne supérieure des nombres λ tels que $a_n e^{\lambda n}$ tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$; c'est la définition habituelle du nombre caractéristique (4).

---

(1) Ce dernier mot sera sous-entendu quand il n'y aura pas d'ambiguïté possible.

(2) M. Ettore Bortolotti, dans un Mémoire, *Sugli integrali...*, inséré dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXXV, 1913, estime l'ordre d'infinitude d'une fonction $f(x)$ par rapport à une autre fonction $\varphi(x)$ en utilisant aussi les notions de limite supérieure et de limite inférieure d'indétermination (*voir* le n° 30 de ce Mémoire). Mais il fait intervenir pour cela les dérivées $f'(x)$, $\varphi'(x)$ des fonctions à comparer; sa définition est donc distincte de celle indiquée ci-dessus, qui ne suppose pas l'existence de ces dérivées. Je l'avais donnée, dans une Communication au Congrès des Sociétés savantes (*Sciences*, 1913, p. 33), en signalant son intérêt dans la théorie des équations différentielles, après l'avoir rapidement signalée dans un Mémoire publié en octobre 1911 dans les *Annales scientifiques de l'École Normale* (3e série, t. XXVIII, p. 475 et 511).

(3) Laplace (*Théories des Probabilités*) donne à la fonction $\Sigma a_n x^n$ le nom de « fonction génératrice de la suite a_n ».

(4) Le nombre caractéristique supérieur de a_n est de même le logarithme du rayon de

On peut pousser plus loin encore ce rapprochement. Dès que l'on connaît, pour une série entière, un nombre positif r inférieur au rayon de convergence, on peut affirmer l'existence d'une fonction majorante de la forme $\frac{M}{1-\frac{x}{r}}$; c'est-à-dire qu'il existe un nombre M tel que

$$|a_n| < \frac{M}{r^n}.$$

D'une façon analogue, il suffit de savoir qu'un nombre λ est inférieur au nombre caractéristique d'une fonction $f(t)$ pour être certain qu'il existe un nombre μ tel que, pour t réel et assez grand (¹),

$$|f(t)| < \mu e^{-\lambda t}.$$

Une fonction à nombre caractéristique positif tend vers zéro en même temps que $\frac{1}{t}$; une fonction à nombre caractéristique négatif ne peut pas rester bornée dans les mêmes conditions; le seul fait que le nombre caractéristique est nul ne permet pas de se prononcer; un examen spécial est nécessaire.

5. Premiers théorèmes de M. Liapounoff. — Nous rappellerons brièvement les énoncés de quelques propositions relatives aux nombres caractéristiques, en renvoyant pour les démonstrations au Mémoire cité de M. Liapounoff et en indiquant les analogies ou les généralisations qu'elles suggèrent.

1° *Le nombre caractéristique de la somme de deux fonctions est égal au plus petit des nombres caractéristiques de ces fonctions, si ces nombres sont différents, et ne leur est pas inférieur quand ces nombres sont égaux* (lemme IV, p. 226).

---

convergence de la série de Laurent $\sum \frac{1}{a_n z^n}$, ou le logarithme changé de signe du rayon de convergence de la série de Taylor $\sum \frac{x^n}{a_n}$.

(¹) De même, connaissant un nombre Λ plus grand que le nombre caractéristique supérieur de $f(t)$, on peut affirmer qu'il y a des nombres M tels que, pour t assez grand,

$$|f(t)| > M e^{-\Lambda t}.$$

La proposition correspondante est bien connue : Le rayon de convergence de la somme de deux séries de Taylor est égal au plus petit des rayons de convergence de ces séries s'ils sont différents et n'est pas inférieur à leur valeur commune s'ils sont égaux (¹).

On ne peut pas énoncer une proposition analogue et aussi générale concernant les nombres caractéristiques supérieurs; il faut nécessairement introduire des conditions complémentaires.

Par exemple : Étant données *deux fonctions réelles de même signe* $f(t)$ et $f_1(t)$, le nombre caractéristique supérieur de leur somme est au plus égal au plus petit de leurs nombres caractéristiques supérieurs. Soient en effet L et L_1 ces nombres $L < L_1$ on a, ε étant positif,

$$|f(t)| > M e^{-(L+\varepsilon)t}, \qquad |f_1(t)| > M_1 e^{-(L_1+\varepsilon)t},$$
$$|f(t)+f_1(t)| = |f(t)| + |f_1(t)| > M e^{-(L+\varepsilon)t}\left\{1 + \frac{M_1}{M} e^{(L-L_1)t}\right\}$$

et le dernier facteur tend vers l'unité quand la variable t devient infinie positive. La démonstration est immédiate si $L = L_1$.

Nous allons étudier un cas plus intéressant. Supposons que les nombres caractéristiques des deux fonctions $f(t)$ et $f_1(t)$ soient l et l_1 et qu'on ait

$$l < L < l_1 < L_1,$$

on peut exprimer ceci en disant que *les intervalles caractéristiques* (l, L) *et* (l_1, L_1) *des deux fonctions* f et f_1 *sont distincts*. Dans ces conditions, on a

$$\left|\frac{f_1(t)}{f(t)}\right| < \frac{m_1 e^{(-l_1+\varepsilon)t}}{M e^{-(L+\varepsilon)t}} = k e^{(L-l_1+2\varepsilon)t},$$

m_1, M, k étant positifs et constants; ε pouvant être aussi voisin de zéro qu'on le veut, ceci montre que $\frac{f_1(t)}{f(t)}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{t}$.

On en conclut que $1 + \frac{f_1(t)}{f(t)}$ reste compris, pour t assez grand, entre

(¹) Si deux fonctions réelles x_1, x_2 sont toutes deux positives ou toutes deux négatives et ont même nombre caractéristique l. le nombre caractéristique de la somme est égal à l. Car il suffit alors qu'un des produits $x_1 e^{(\lambda+\varepsilon)t}$, $x_2 e^{(\lambda+\varepsilon)t}$ ne soit pas borné pour qu'il en soit de même de leur somme $(x_1 + x_2) e^{(\lambda+\varepsilon)t}$.

deux nombres positifs, $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ par exemple; il en résulte que *la somme*

$$f(t)+f_1(t)=f(t)\left\{1+\frac{f_1(t)}{f(t)}\right\}$$

a mêmes nombres caractéristiques l *et* L *que la fonction* $f(t)$.

2° *Le nombre caractéristique du produit de deux fonctions n'est pas inférieur à la somme de leurs nombres caractéristiques* (lemme V, p. 227).

On en conclut : Le rayon de convergence de la série $\Sigma a_n b_n x^n$ n'est pas inférieur au produit des rayons de convergence des séries $\Sigma a_n x^n$, $\Sigma b_n x^n$.

Cette proposition est d'ailleurs une conséquence immédiate du théorème de M. Hadamard : Les seuls points singuliers possibles de la série $\Sigma a_n b_n x^n$ sont ceux qu'on obtient en multipliant les affixes des points singuliers de $\Sigma a_n x^n$ par les affixes des points singuliers de $\Sigma b_n x^n$ (1).

Une proposition analogue s'applique aux nombres caractéristiques supérieurs; c'est d'ailleurs une conséquence de la précédente : *Le nombre caractéristique supérieur du produit de deux fonctions n'est pas supérieur à la somme des nombres caractéristiques supérieurs de ces fonctions.*

En résumé, si l et L sont le nombre caractéristique et le nombre caractéristique supérieur de $f(t)$, et l_1 et L_1 les éléments caractéristiques analogues pour $f_1(t)$, λ et Λ le nombre caractéristique et le nombre caractéristique supérieur du produit $f(t)f_1(t)$, on a

$$l+l_1\leq\lambda\leq\Lambda\leq L+L_1. \tag{1}$$

Appliquons ces inégalités aux deux fonctions $f(t)\,f_1(t)=\varphi(t)$ et $\frac{1}{f_1(t)}=\varphi_1(t)$ pour lesquels les éléments caractéristiques (2) sont λ, Λ et $-L_1$, $-l_1$; le produit $\varphi\varphi_1$, étant précisément f, on a

$$\lambda-L_1\leq l\leq L\leq\Lambda-l_1,$$

(1) *Voir* le Chapitre VII (n° 4) de l'Ouvrage de M. Hadamard : *La série de Taylor et son prolongement analytique*, où sont résumés les travaux de MM. Hadamard, Borel, Leau, etc., au sujet de cet important théorème.

(2) On suppose ici que ces nombres sont finis.

ce qui donne

$$\lambda \leq l + L_1, \qquad \Lambda > L + l_1. \tag{2}$$

On a de même

$$\lambda \leq l_1 + L, \qquad \Lambda \geq L_1 + l \quad (^1). \tag{3}$$

Dans le cas particulier où le nombre caractéristique et le nombre caractéristique supérieur de l'une des fonctions sont égaux entre eux, les inégalités (1) et (2) donnent alors, ainsi que M. Liapounoff l'a remarqué (lemme VII), les valeurs exactes des éléments caractéristiques du produit.

Pour les séries de Taylor, ce cas particulier est celui où $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers une limite pour n infini; dans ces conditions, quelle que soit la série $\Sigma b_n x^n$, le rayon de convergence de la série $\Sigma a_n b_n x^n$ est le produit des rayons de convergence des séries $\Sigma a_n x^n$, $\Sigma b_n x^n$.

6. Cas des intégrales et des sommes définies (2). — A une fonction intégrable $f(t)$ M. Liapounoff fait correspondre l'une ou l'autre des intégrales

$$\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt, \qquad \int_{t}^{+\infty} f(t)\,dt$$

selon que le nombre caractéristique de $f(t)$ est non positif ou positif; il démontre alors (lemme VIII) que *le nombre caractéristique d'une intégrale n'est pas inférieur à celui de la fonction à intégrer.*

En général on ne peut pas énoncer une proposition aussi simple pour les nombres caractéristiques supérieurs. On peut le faire cependant quand la fonction $f(t)$ garde, pour t assez grand, un signe constant; supposons-la positive, et soit L son nombre caractéristique

(1) Ces propositions s'appliquent à la théorie de la croissance; elles s'énoncent alors de la façon suivante : « Étant données deux fonctions $F(x)$, $F_1(x)$ d'ordres respectifs (p, q), (p_1, q_1), soit (P, Q) l'ordre de leur produit; P et Q sont compris entre $p + q_1$ et $q + q_1$ et comprennent entre eux $p + q_1$ et $p_1 + q$. » Les nombres p, q, p_1, q_1, P, Q peuvent avoir des signes quelconques (*voir* n° 3), mais sont supposés finis. C'est une extension des théorèmes classiques concernant l'ordre d'infinitude ou l'ordre infinitésimal d'un produit.

(2) *Voir* à ce propos les *Leçons sur la Théorie de la croissance* de M. E. Borel.

supérieur. La fonction $f(t)$ domine (¹) alors une fonction de la forme $Me^{-(L+\varepsilon)t}$, ε étant positif et arbitrairement petit: l'intégrale

$$\int f(t)\,dt,$$

où les limites sont respectivement t et $+\infty$ ou t_0 et t suivant que $L>0$ ou que $L\leq 0$ domine une fonction de même forme; c'est dire que le nombre caractéristique supérieur de l'intégrale est au plus égal à L.

En résumé, dans le cas d'une fonction $f(t)$ de signe constant et dont les nombres caractéristiques sont de même signe, les nombres caractéristiques de l'intégrale sont intérieurs à l'intervalle formé par les nombres caractéristiques de la fonction, ou placés aux bornes de cet intervalle.

Nous allons donner un théorème analogue au précédent pour les suites a_n. Mais il faut d'abord préciser quels éléments nous ferons alors correspondre à ces intégrales.

Lorsque le rayon de convergence de la série ne surpassera pas l'unité, nous prendrons

$$S_n=\sum_{0}^{n} a_i=a_0+a_1+\ldots+a_{n-1},\qquad S_0=0,$$

et lorsque ce rayon sera supérieur à l'unité,

$$S_n=\sum_{+\infty}^{n} a_i=-(a_n+a_{n+1}+\ldots).$$

Dans les deux cas, on a

$$\Delta S_n=S_{n+1}-S_n=a_n,$$

et, suivant une dénomination adoptée dans la théorie des diffé-

(¹) Une fonction $f(t)$ *domine*, dans un intervalle où reste comprise la variable réelle t, une autre fonction $\varphi(t)$ lorsqu'elle en surpasse le module: c'est-à-dire qu'on a

$$f(t)\geq|\varphi(t)|.$$

rences (¹), nous dirons que S_n est la somme définie correspondant à la suite.

On a, dans la première hypothèse,

$$F(x) = \Sigma S_n x^n = a_0 x + (a_0 + a_1) x^2 + (a_0 + a_1 + a_2) x_3 = \ldots = \frac{x}{1-x} f(x),$$

en désignant par $f(x)$ la somme de la série $\Sigma a_n x^n$. Dans la seconde hypothèse, écrivons

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots, \qquad S'_n = S + S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1},$$

S_n ayant le sens indiqué plus haut; il vient

$$F(x) = \Sigma S_n x^n = \frac{x}{1-x} f(x) - \frac{S}{1-x} = \frac{x f(x) - f(1)}{1-x}$$

et l'on peut diviser haut et bas par $x - 1$; $x = 1$ n'est donc pas un point singulier pour $F(x)$.

Dans les deux cas, les deux fonctions $F(x)$ et $f(x)$ ont mêmes points singuliers (sauf peut-être $x = 1$) et par suite *la série* $\Sigma S_n x^n$ *associée aux sommes définies* S_n *a même rayon de convergence que la série* $\Sigma a_n x^n$ *associée à la suite* a_n.

Dans les cas des suites et de leurs sommes définies, il y a donc égalité des nombres caractéristiques. Pour les fonctions et leurs intégrales l'inégalité des nombres caractéristiques peut effectivement avoir lieu : pour le montrer, *nous construirons une fonction ayant un nombre caractéristique l négatif donné à l'avance et dont l'intégrale aura pour nombre caractéristique zéro.*

Soit (C) la courbe $y = e^{l't}$, où $l' = -l$; et une série convergente à termes positifs et inférieurs à $\frac{1}{2}$

$$(u) \qquad u_1 + u_2 + u_3 + \ldots.$$

Je construis la fonction $f(t)$ représentée graphiquement par une brisée dont les sommets seront les uns sur (C), les autres sur Ox. (Le lecteur est prié de faire la figure.) Chaque point O_n situé sur Ox ayant

(¹) Voir *Encyclopédie des Sciences mathématiques* (édition française), t. I, fasc. 1, p. 55.

pour abscisse un nombre entier n est le milieu d'un segment porté par cet axe, A_nB_n, de longueur $2u_n e^{ln}$; soit C_n le point de (C) qui se projette en O_n; la ligne représentative de $f(t)$ se compose des segments de droite

$$OA_1,\ A_1C_1,\ C_1B_1,\ B_1A_2,\ \ldots,\ A_nC_n,\ C_nB_n,\ B_nA_{n+1},\ \ldots.$$

Les segments B_nA_{n+1} n'empiètent pas les uns sur les autres, puisque u_n étant inférieur à $\frac{1}{2}$ et l étant négatif, la valeur commune $u_n e^{ln}$ des segments A_nO_n, O_nB_n est inférieure à $\frac{1}{2}$.

On voit du reste immédiatement que, si petit que soit le nombre positif ε, $e^{(l-\varepsilon)t} f(t)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{t}$ et que dans les mêmes conditions $e^{(l+\varepsilon)t} f(t)$ ne reste pas bornée; *l est bien le nombre caractéristique de $f(t)$.*

Ce nombre est négatif, nous étudions par suite l'intégrale $\int_0^t f(t)\,dt$; il suffit de faire la figure pour voir que, si t est compris entre $n+\frac{1}{2}$ et $n+\frac{3}{2}$, cette intégrale est comprise entre la somme des n premiers termes de la série (u) et celle des $n+1$ premiers termes. L'intégrale tend donc pour t infini vers la somme de la série; *son nombre caractéristique est bien nul.*

7. Généralisation des résultats précédents. — A la fin du n° 3 nous avons défini les notions de nombres caractéristiques (inférieur et supérieur) d'une fonction $f(t)$ par rapport à une fonction de comparaison $\theta(t)$ positive croissante et devenant infinie quand t tend vers $+\infty$. *Les premières propositions de M. Liapounoff* (n° 5) *s'appliquent encore à ces nouveaux nombres.* Mais il y a lieu de modifier l'énoncé quand il s'agit de l'intégration, ainsi que nous allons le voir.

On a

$$f(t)\,dt = \frac{f(t)}{\theta'(t)}\,d\theta,$$

où $\theta'(t)$ désigne la dérivée $\frac{d\theta}{dt}$; ce sont les nombres caractéristiques du

quotient $\frac{f(t)}{\theta'(t)}$ qui vont remplacer ceux de $f(t)$ dans les énoncés du n° 5. Ils permettent encore de déterminer, suivant les cas, une fonction supérieure au module de la fonction à intégrer ou une fonction positive inférieure au module de la fonction à intégrer, et des éléments analogues pour l'intégrale elle-même. Il nous suffira d'énoncer les propositions auxquelles on est ainsi conduit.

A. *Soit p un nombre fini inférieur ou égal au nombre caractéristique du quotient* $\frac{f(t)}{\theta'(t)}$ *par rapport à la fonction de comparaison* $\theta(t)$, *en considérant l'intégrale* $\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt$ *lorsque* $p \leq 1$ *et l'intégrale* $\int_{t}^{+\infty} f(t)\,dt$ *lorsque* $p > 1$, *le nombre caractéristique inférieur de l'intégrale par rapport à* $\theta(t)$ *n'est pas inférieur à* $p - 1$.

Remarques. — 1° Les nombres caractéristiques de la dérivée $\theta'(t)$ de la fonction de comparaison (dérivée dont nous admettons l'existence) sont des constantes intéressantes attachées à cette fonction. Toutefois ces constantes ne sont pas nécessairement finies, comme le montre l'exemple de $\theta(t) = \log t$.

2° La fonction $f(t)$ peut dans cet énoncé être une fonction complexe, mais la variable t est supposée réelle.

3° La condition $p > 1$ suffit pour que l'intégrale $\int_{t}^{+\infty} f(t)\,dt$ ait un sens.

B. *Lorsque la fonction* $f(t)$ *est réelle et de signe constant, et que* P *est un nombre fini supérieur ou égal au nombre caractéristique supérieur du quotient* $\frac{f(t)}{\theta'(t)}$ *par rapport à la fonction de comparaison* $\theta(t)$, *en prenant* $\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt$ *quand* $P \leq 1$ *et* $\int_{t}^{+\infty} f(t)\,dt$ *lorsque* $P > 1$, *le nombre caractéristique supérieur de l'intégrale par rapport à* $\theta(t)$ *n'est pas supérieur à* $P - 1$.

En particulier, si $P < 1$, on peut affirmer que l'intégrale $\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt$ devient infinie quand t tend vers $+\infty$.

Si $P = p = 1$ les propositions précédentes ne permettent pas de se prononcer, on substituera alors, comme on sait, à la fonction $\theta(t)$ la nouvelle fonction de comparaison $\log\theta(t)$.

Le cas le plus favorable est celui où les théorèmes A et B sont simultanément applicables et où les différences $p - 1$, $P - 1$ sont de même signe; les théorèmes précédents renseignent d'une façon complète sur la convergence ou la divergence de l'intégrale $\int f(t)dt$, et donnent une double estimation, par défaut et par excès, de la rapidité de cette convergence ou de cette divergence.

8. Exemples : 1° Si $\theta(t) = e^t$, $\theta'(t) = \theta(t)$, les nombres caractéristiques inférieur et supérieur de $\theta'(t)$ sont tous deux égaux à -1, et si p et P sont les nombres caractéristiques de $\frac{f(t)}{\theta'(t)}$ par rapport à $\theta(t)$, ceux du produit $\frac{f(t)}{\theta'(t)}\theta'(t) = f(t)$ sont, d'après une remarque antérieure (n° 5), égaux à $p - 1$ et $P - 1$; les deux propositions A et B sont identiques à celles du n° 6.

2° En prenant pour $\theta(t)$ la fonction $\log_i(t)$ obtenue par itération de la fonction logarithmique,

$$\log_2 t = \log\log t, \qquad \ldots, \qquad \log_i t = \log\log_{i-1} t,$$

on est amené à considérer le produit $f(t)t\log t \ldots \log_{i-1} t$ et ses nombres caractéristiques par rapport à $\theta(t)$, ainsi que l'a fait M. Boutroux dans l'étude qu'il a dû faire (¹) des intégrales $\int \frac{dx}{u(x)}$.

3° Soit $F(t; x, y)$ une fonction réelle ou imaginaire de la variable réelle d'intégration t et d'autres variables x, y qui pourraient être en nombre quelconque et que nous pouvons, par suite, supposer réelles. On veut étudier l'une ou l'autre des intégrales

$$\int_{t_0}^{t} F(t; x, y)\,dt, \qquad \int_{t}^{+\infty} F(t; x, y)\,dt$$

lorsque la borne t de l'intervalle d'intégration croît indéfiniment.

(¹) *Acta mathematica*, t. XXVIII, 1904, p. 106.

L'application du théorème A et de la définition du nombre caractéristique amène à rechercher comment se comporte, pour de grandes valeurs de t, le logarithme de F. Nous ferons à ce propos l'hypothèse suivante :

On peut poser

$$\log \mathrm{F}(t; x, y) = [h(x, y) + k(t) + u(t; x, y)]g(t),$$

$g(t)$ désignant une fonction réelle de t, positive, croissante, devenant infinie quand t tend vers $+\infty$.

Les fonctions $h(x, y)$, $k(t)$, $u(t; x, y)$ peuvent être réelles ou complexes. En désignant par $\mathcal{R}(z)$, suivant l'usage, la partie réelle du nombre complexe z, on admet que $\mathcal{R}k(t)$ reste bornée supérieurement quand t tend vers $+\infty$ et que, x, y restant dans un domaine D et t tendant vers $+\infty$, $\mathcal{R}u(t; x, y)$ tend vers zéro.

Cette hypothèse, que nous appellerons *hypothèse* I, étant admise, nous prendrons comme fonction de comparaison

$$\theta(t) = e^{g(t)}.$$

Tant que le point x, y reste dans une partie D′ du domaine D où $\mathcal{R}h(x, y)$ reste bornée supérieurement, le nombre caractéristique de $\mathrm{F}(t; x, y)$ par rapport à $\theta(t)$ reste fini ; il est égal à

$$-\{\mathcal{R}h(x, y) + \mathrm{K}\},$$

K désignant la borne supérieure de $\mathcal{R}[k(t)]$.

Quand on passe de F à $\frac{\mathrm{F}}{\theta'}$, on doit considérer

$$\log \mathrm{F} - \log \theta' = \log \mathrm{F} - g - \log g', \qquad g' = \frac{dg}{dt},$$

et

$$\frac{1}{g} \log \frac{|\mathrm{F}|}{\theta'} = \frac{\log |\mathrm{F}|}{g} = 1 - \frac{\log g'}{g}.$$

Nous admettrons (ce sera l'*hypothèse* II) que $\frac{\log g'}{g}$ *reste borné inférieurement ;* soit γ sa borne inférieure, le nombre caractéristique de $\frac{\mathrm{F}}{\theta'}$ est

$$-\mathcal{R}[h(x, y)] - \mathrm{K} + \gamma + 1$$

et celui de l'intégrale est au moins égal à

$$-\mathcal{R}[h(x, y)] - K + \gamma.$$

Par suite, l'intégrale

$$I = \int_{t_0}^{t} F(t; x, y)\, dt$$

a certainement une limite quand t tend vers $+\infty$ *si*

$$\mathcal{R}[h(x, y)] < \gamma - K,$$

puisque le nombre caractéristique est alors positif.

Des intégrales de la forme précédente se rencontrent dans des questions variées d'Analyse et de Physique (¹).

On peut pousser plus loin l'étude de ces intégrales, en utilisant deux théorèmes que je vais indiquer.

9. Autres estimations des nombres caractéristiques des intégrales. — *Nous désignerons pour abréger par* $c(f)$ *le nombre caractéristique d'une fonction* $f(t)$ *par rapport à la fonction de comparaison* $\theta(t)$, qui peut toujours être distincte de la fonction exponentielle.

C. *Soient f et* φ *deux fonctions de t,* f' *et* φ' *leurs dérivées,* θ *la fonction de comparaison,* θ' *sa dérivée ; on pose*

$$p' = c(f) + c\left(\frac{\varphi'}{\theta'}\right).$$

Si p' est supérieur à l'unité, l'intégrale $\int_{t}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt$ *a un sens et son nombre caractéristique n'est pas inférieur à* $p' - 1$; *si* $p' \leq 1$, *le nombre caractéristique de* $\int_{t_0}^{t} f(t)\varphi'(t)\,dt$ *n'est pas inférieur à* $p' - 1$.

(¹) Citons, par exemple, la théorie des *fonctions déterminantes* de Laplace, dont l'étude a été reprise de nos jours par M. Pincherle. *Voir* dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, édition française, l'article II, 26 (Équations et Opérations fonctionnelles), où l'analyste italien donne (n° 23) une bibliographie de la question; *voir* aussi son article plus récent (*Acta mathematica*, 1913) et le travail signalé plus haut, de M. Bortolotti : *Sugli integrali...*, Chap. VI. Nous indiquerons, en Physique, la Théorie de la chaleur, en renvoyant au *Traité d'Analyse* de M. Goursat, t. III, Chap. XIX.

Cette proposition est une conséquence immédiate de celle concernant le nombre caractéristique d'un produit et du théorème A du n° 7.

Les critères précédents sont des critères de convergence absolue, les suivants peuvent être d'un emploi plus large.

Les mêmes intégrales s'étudient au moyen des formules d'intégration par parties :

$$\int_{t_0}^{t} f\varphi' \, dt = [f\varphi]_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \varphi f' \, dt \tag{1}$$

et

$$\int_{t}^{+\infty} f\varphi' \, dt = [f\varphi]_{t}^{+\infty} - \int_{t}^{+\infty} \varphi f' \, dt. \tag{2}$$

D'après les théorèmes concernant les nombres caractéristiques d'une somme et d'un produit, et la proposition C, on cherche le plus petit des nombres $c(f) + c(\varphi)$ et $c(\varphi) + c\left(\frac{f'}{\theta'}\right) - 1$.

On écrit

$$f(t) = -\int_{t}^{+\infty} f'(t) \, dt \quad \text{lorsque} \quad c\left(\frac{f'}{\theta'}\right) - 1 > 0$$

et

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t} f'(t) \, dt \quad \text{lorsque} \quad c\left(\frac{f'}{\theta'}\right) - 1 \leq 0,$$

le nombre caractéristique de la constante $f(t_0)$ est nul, et par suite le théorème A nous apprend que, dans l'un et l'autre cas,

$$c(f) \geq c\left(\frac{f'}{\theta'}\right) - 1.$$

On a donc

$$c(f) + c(\varphi) \geq c\left(\frac{f'}{\theta'}\right) + c(\varphi) - 1$$

et l'on peut énoncer le théorème suivant :

D. *En posant*

$$p'' < c\left(\frac{f'}{\theta'}\right) + c(\varphi),$$

l'intégrale $\int_{t}^{+\infty} f\varphi' \, dt$ *a un sens si* $p'' > 1$ *et son nombre caractéristique est*

supérieur ou égal à $p''-1$; *si* $p''<1$, *le nombre caractéristique de*

$$\int_{t_0}^{t} f\varphi'\,dt$$

n'est pas inférieur à $p''-1$.

On observe que si φ' est seul connu, on peut prendre suivant que $c(\varphi')>1$ ou que $c(\varphi')<1$,

$$\varphi=-\int_{t}^{+\infty}\varphi'\,dt \qquad \text{ou} \qquad \varphi=\int_{t_0}^{t}\varphi'\,dt.$$

Remarque. — Pour estimer $c\left(\frac{f}{\theta'}\right)$, on peut écrire $\frac{f}{\theta'}=\frac{f}{\theta'}\cdot\frac{f'}{f}$ et il vient

$$c\left(\frac{f}{\theta'}\right)\leq c\left(\frac{f}{\theta'}\right)+c\left(\frac{f'}{f}\right).$$

10. Domaine de convergence de certaines intégrales définies. — Nous allons appliquer ces derniers théorèmes à la théorie des intégrales

$$\mathrm{I}(x,y)=\int_{t_0}^{+\infty}a(t)\mathfrak{F}(t;x,y)\,dt,$$

analogues aux fonctions déterminantes de Laplace. Celles-ci ont été plus récemment étudiées par divers auteurs et en particulier par M. Pincherle (1).

Ces intégrales sont de la forme considérée plus haut, mais la présence du facteur $a(t)$ nous permet, sans diminuer la généralité, de supposer nul le terme analogue à $k(t)$.

Écrivons donc

$$\log\mathfrak{F}(t;x,y)=g(t)[h(x,y)+u(t;x,y)].$$

Aux hypothèses antérieures, I et II (p. 144), nous substituons maintenant l'*hypothèse* III :

La fonction $g(t)$ est réelle, positive, croissante, devient infinie avec t; elle sert à former la fonction de comparaison $\theta(t)=e^{g^2t}$: la

(1) *Voir* la note de la page 145.

dérivée $g'(t)$ a ses deux nombres caractéristiques ordinaire et supérieur égaux à zéro. Quand le point x, y reste dans un domaine D et que t tend vers $+\infty$, la fonction $\mathcal{R}[h(x,y)]$ reste bornée, $u(t; x, y)$ tend vers zéro, et sa dérivée $u'_t(t; x, y)$ reste bornée.

Dans ces conditions, le nombre γ de tout à l'heure est nul et les deux nombres caractéristiques de $\mathcal{F}$ sont égaux. On voit de plus que le nombre caractéristique du quotient

$$\frac{\mathcal{F}'_t(t; x, y)}{\mathcal{F}(t; x, y)} = g'(t)[h(x,y) + u(t; x, y)] + g(t)u'_t(t; x, y)$$

est nul ou positif.

Ceci posé, admettons que l'intégrale

$$\varphi(t) = \int_t^{+\infty} a(t)\mathcal{F}(t; x_0, y_0)\,dt$$

ait un sens (x_0, y_0 étant un point particulier de D). Le nombre caractéristique $c(\varphi)$ est positif ou nul, puisque φ tend vers zéro avec $\frac{1}{t}$. On peut écrire

$$\varphi' = a(t)\mathcal{F}(t; x_0, y_0)$$

et

$$a(t)\mathcal{F}(t; x, y) = f\varphi',$$

en posant

$$f = \frac{\mathcal{F}(t; x, y)}{\mathcal{F}(t; x_0, y_0)}.$$

En raisonnant comme plus haut, on a d'abord

$$c\left(\frac{f}{\theta'}\right) = \mathcal{R}[h(x_0, y_0)] - \mathcal{R}[h(x, y)] + 1.$$

D'autre part,

$$c\left(\frac{f'}{f}\right) = c\left[\frac{\mathcal{F}'(t; x, y)}{\mathcal{F}(t; x, y)} - \frac{\mathcal{F}'_t(t; x_0, y_0)}{\mathcal{F}(t; x_0, y_0)}\right]$$

est nul ou positif, comme nombre caractéristique d'une somme de deux termes à nombres caractéristiques nuls ou positifs. On voit (n° 9) que

$$p'' = c\left(\frac{f'}{\theta'}\right) + c(\varphi) \geq c\left(\frac{f}{\theta'}\right) = \mathcal{R}[h(x_0, y_0)] - \mathcal{R}[h(x, y)] + 1$$

est supérieur à l'unité dès que

$$\mathcal{R}[h(x, y)] < \mathcal{R}[h(x_0, y_0)].$$

En définitive, *si l'intégrale*

$$\mathrm{I}(x, y) = \int_{t_0}^{+\infty} a(t)\,\mathcal{F}(t; x, y)\,dt$$

a un sens pour un point x_0, y_0 du domaine D, *elle aura également un sens pour tous les points du même domaine tels que la partie réelle de la fonction $h(x, y)$ reste inférieure à la partie réelle de l'expression $h(x_0, y_0)$.*

Supposons qu'il y ait, dans le domaine D, des points où l'intégrale précédente $\mathrm{I}(x, y)$ soit convergente et d'autres où elle ne le soit pas; admettons, de plus, la continuité de la fonction $h(x, y)$ ou, tout au moins, celle de sa partie réelle $\mathcal{R}[h(x, y)]$, *il existe alors une frontière de convergence, séparant la région de convergence de la région de divergence, et l'équation de cette frontière est de la forme*

$$\mathcal{R}[h(x, y)] = \alpha,$$

α désignant une constante.

11. Détermination de la frontière de convergence. — *Cette constante est égale au nombre caractéristique de l'intégrale*

$$\mathrm{A}_1(t) = -\int_t^{+\infty} a(t)\,dt,$$

quand cette intégrale existe et que son nombre caractéristique est positif, ou à celui de l'intégrale

$$\mathrm{A}_2(t) = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt,$$

quand l'intégrale précédente n'existe pas ou, qu'existant, elle a un nombre caractéristique nul (il ne peut pas être négatif); nous désignerons par $c(\mathrm{A})$ celui de ces nombres que nous aurons à considérer.

En se reportant à la définition du nombre caractéristique d'une fonction $f(t)$ par rapport à la fonction de comparaison $0(t)$

$$c(f) = -\overline{\lim_{t=+\infty}} \frac{\log|f(t)|}{\log 0(t)},$$

on voit que la proposition qui vient d'être énoncée est une généralisation étendue des théorèmes de M. Pincherle (¹) donnant l'abscisse de convergence d'une fonction déterminante.

Pour la démonstration, je suppose d'abord que x_0, y_0 soit un point de D intérieur au domaine de convergence; le mot *intérieur* est entendu au sens étroit : il existe d'autres points x'_0, y'_0 du domaine de convergence pour lesquels

$$\mathcal{R}[h(x_0, y_0)] < \mathcal{R}[h(x'_0, y'_0)].$$

Posons

$$\varphi(t) = -\int_t^{+\infty} a(t)\,\bar{\mathcal{F}}(t; x_0, y_0)\,dt,$$

il résulte de la démonstration antérieure (x_0, y_0 et x, y jouaient alors respectivement le rôle de x'_0, y'_0 et x_0, y_0) que $c(\varphi) > 0$.

Écrivons

$$a(t) = a(t)\,\bar{\mathcal{F}}(t; x_0, y_0)\,\frac{1}{\bar{\mathcal{F}}(t; x_0, y_0)}.$$

Nous avons

$$\varphi' = a(t)\,\bar{\mathcal{F}}(t; x_0, y_0)$$

et nous posons

$$f(t) = \frac{1}{\bar{\mathcal{F}}(t; x_0, y_0)}.$$

Appliquons le théorème antérieur D, cherchons, pour cela, $c\left(\frac{f'}{f}\right)$ ou plutôt $c\left(\frac{f}{f'}\right) + c\left(\frac{f'}{f}\right)$, qui ne peut surpasser le nombre précédent.

On a, sans difficulté,

$$c\left(\frac{f}{f'}\right) = \mathcal{R}[h(x_0, y_0)] + 1.$$

et, puisque $\frac{f'}{f} = -\frac{\bar{\mathcal{F}}_t(t; x_0, y_0)}{\bar{\mathcal{F}}(t; x_0, y_0)}$,

$$c\left(\frac{f'}{f}\right) = 0 \quad (\text{n° 10}).$$

Prenons

$$p'' = \mathcal{R}[h(x_0, y_0)] + 1.$$

(¹) *Voir* les articles cités, p. 145.

ce nombre est bien inférieur ou égal à $c\left(\frac{f'}{\theta'}\right) + c(\varphi)$ et nous savons que le nombre caractéristique $c(A)$ de l'intégrale $A = \int a(t)\,dt$ (d'une façon plus précise A, dans le cas de $p'' > 1$, ou $\mathcal{R}[h(x_0, y_0)] > 0$, A_2 dans le cas de $p'' \leq 1$, ou $\mathcal{R}[h(x_0, y_0)] \geq 0$), n'est pas inférieur à $p'' - 1$; donc, si $\mathcal{R}[h(x_0, y_0)] < \alpha$, on a aussi

$$c(A) \geq \mathcal{R}[h(x_0, y_0)].$$

On peut, du reste, supposer que x_0, y_0 est assez voisin de la frontière du domaine de convergence pour que $\mathcal{R}[h(x_0, y_0)]$ ait le signe de α; il en est de même, alors, de $c(A)$, et la règle du début de ce numéro est vraie pour les signes; de plus, des inégalités précédentes on déduit, x_0, y_0 étant aussi voisin qu'on veut de la frontière du domaine de convergence,

$$c(A) \geq \alpha. \tag{1}$$

Prenons maintenant un point x_0, y_0 du domaine D tel qu'on ait

$$\mathcal{R}[h(x_0, y_0)] < c(A)$$

et écrivons

$$a(t)\mathcal{F}(t; x_0, y_0) = f\varphi',$$

où

$$f = \mathcal{F}(t; x_0, y_0). \qquad \varphi' = a(t).$$

φ désignant, suivant le signe de $c(A)$, l'une des intégrales A_1 ou A_2, nous avons

$$c(\varphi) = c(A), \qquad c\left(\frac{f'}{\theta'}\right) \geq -\mathcal{R}[h(x_0, y_0)] + 1$$

et, par conséquent, en prenant

$$p' = c(\varphi) + c\left(\frac{f'}{\theta'}\right),$$

on a

$$p' \geq c(A) - \mathcal{R}[h(x_0, y_0)] + 1.$$

Comme $p'' > 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f\varphi'\,dt$ a un sens, ce qui démontre que l'intégrale

$$\int_{t_0}^{+\infty} a(t)\mathcal{F}(t; x_0, y_0)\,dt$$

est convergente. Par suite, on a $\mathcal{R}[h(x_0, y_0)] < \alpha$, et, puisque $\mathcal{R}[h(x_0, y_0)]$, tout en étant inférieur à $c(A)$, peut en être aussi voisin qu'on le veut,

$$c(A) \leq \alpha.$$

En rapprochant cette inégalité de l'inégalité (1), p. 151, on voit que

$$c(A) = \alpha,$$

ce qu'il fallait établir.

12. Nombres caractéristiques généralisés d'une suite. — Étant donnée une suite indéfinie de nombres réels ou complexes

$$(a) \qquad a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots,$$

on peut encore en estimer (par excès) la croissance en la comparant à une suite

$$(\theta) \qquad \theta_0, \quad \theta_1, \quad \theta_2, \quad \ldots, \quad \theta_n, \quad \ldots$$

formée de nombres positifs croissants avec l'indice, devenant infinis en même temps que lui, et en suivant la même marche que plus haut (n° 3, fin). L'expression

$$c_\theta(a) = -\overline{\lim_{n=+\infty}} \frac{\log|a_n|}{\log\theta_n},$$

que nous désignerons aussi par $c(a)$ quand il n'y aura pas d'ambiguïté, définit le *nombre caractéristique* (*inférieur ou ordinaire*) *de la suite* (a) *par rapport à la suite de comparaison* (θ). C'est ainsi qu'en prenant

$$\theta_n = e^n,$$

on a les nombres caractéristiques de M. Liapounoff intervenant dans la théorie des suites des coefficients de séries de Taylor, c'est-à-dire les logarithmes des rayons de convergence des séries associées.

Un autre exemple intéressant se présente encore dans l'étude des séries de Taylor. Soit $\Sigma a_n x^n$ une telle série dont le rayon de convergence est égal à l'unité; prenons $\theta_n = n$, le nombre caractéristique

$$c_\theta(a) = -\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log|a_n|}{\log n}$$

étant censé fini, si l'on pose

$$c_0(a) = 1 - \omega,$$

$\omega = 1 - c_0(a)$ est un nombre dont M. Hadamard (¹) a montré l'importance et qu'il appelle l'*ordre de la série sur son cercle de convergence*.

La connaissance du nombre caractéristique $c(a)$ ou simplement d'un nombre λ inférieur à $c(a)$ donne une suite dominant la suite a_n,

$$\nu_n = M\theta_n^{-\lambda} > |a_n|.$$

Cette inégalité est vérifiée dès les premiers termes si M est convenablement choisi; elle l'est certainement à partir d'une certaine valeur de n si le nombre positif M a été pris d'une façon quelconque.

On définit d'une façon analogue le nombre caractéristique supérieur de la suite (a) relativement à la suite (θ).

Les premiers théorèmes de M. Liapounoff, concernant les nombres caractéristiques d'une somme d'un produit, les fonctions à nombres caractéristiques supérieur et inférieur égaux entre eux, etc., s'étendent manifestement aux nombres caractéristiques des suites, au sens général où nous l'entendons actuellement.

C'est ainsi que le second des exemples cités plus haut nous montre que si l'on a deux séries de Taylor $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, l'ordre de leur somme $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ est égal au plus grand des ordres des fonctions φ et ψ s'ils sont différents et ne leur est pas supérieur s'ils sont égaux (*voir* HADAMARD, *La série de Taylor*, p. 46).

Si l'on a

$$\varphi(x) = \Sigma a_n x^n, \qquad \psi(x) = \Sigma b_n x^n$$

et si l'on pose

$$F(x) = \Sigma a_n b_n x^n,$$

toutes ces séries ayant pour rayon de convergence l'unité, l'ordre de F n'est pas supérieur au produit des ordres de φ et de ψ.

Le cas des sommes définies exige plus d'attention. Comme plus

(¹) Thèse, *Journal de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. VIII, 1892, p. 171; *La série de Taylor*, p. 45 à 49.

haut (n° 6), nous considérons la suite S′ formée par les sommes

$$S'_n = -(a_n + a_{n+1} + \dots),$$

c'est-à-dire par les restes changés de signe de la série lorsque nous serons sûrs de la convergence de cette série, et la suite S″ formée par les sommes des premiers termes

$$S''_n = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}$$

quand nous ne pourrons pas affirmer la convergence de cette série. Il est du reste facile de s'assurer que, pour une série convergente,

$$c(S') \geq c(S'').$$

C'est évident si la somme de la série est nulle, puisque alors $S''_n = S'_n$; si la somme de la série est $S \neq 0$, on a

$$\lim S''_n = S,$$

d'où

$$c(S'') = c(S) = 0,$$

alors que $c(S')$, nombre caractéristique d'une suite tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, est positif ou nul.

Bref, nous considérerons le nombre caractéristique des restes de la série quand nous la saurons convergente, celui des sommes des premiers termes quand la série sera divergente ou que la convergence ne pourra être affirmée.

Cherchons à estimer $c(S')$ ou $c(S'')$. Pour cela nous écrirons, suivant les cas,

$$(1) \qquad a_i = \frac{a_i}{\Delta\theta_{i-1}} \Delta\theta_{i-1}, \qquad \Delta\theta_{i-1} = \theta_i - \theta_{i-1}$$

ou

$$(2) \qquad a_i = \frac{a_i}{\Delta\theta_i} \Delta\theta_i, \qquad \Delta\theta_i = \theta_{i+1} - \theta_i$$

et nous regarderons $|a_i|$ comme l'aire d'un rectangle, dont la base portée par l'axe des abscisses OO joindra les points $\theta_{i-1}\theta_i$ ou $\theta_i\theta_{i+1}$. Cette aire est inférieure à celle qui est comprise entre les mêmes

ordonnées, l'axe $O\theta$ et la courbe $\alpha = M\theta^{-p}$, où M est une constante positive et $-p$ un exposant convenablement choisi.

Nous prendrons $\Delta\theta_i$ lorsque la fonction $\alpha = M\theta^{-p}$ sera croissante ou constante, c'est-à-dire lorsque $p \leq 0$; nous prendrons $\Delta\theta_{i-1}$ pour $p > 0$. En évaluant l'aire correspondant à la courbe, on a le théorème suivant analogue au théorème A du n° 7 :

A'. 1° Si $c\left(\frac{a_n}{\Delta\theta_{n-1}}\right) > 1$ et si p est un nombre quelconque satisfaisant à la double inégalité $1 < p < c\left(\frac{a_n}{\Delta\theta_{n-1}}\right)$, *la série* Σa_n *converge* et

$$c(S') > p - 1;$$

2° Si $1 \leq c\left(\frac{a_n}{\Delta\theta_{n-1}}\right) > 0$ et si $0 < p < c\left(\frac{a_n}{\Delta\theta_{n-1}}\right)$, *on ne peut pas affirmer la convergence de la série*, mais on a

$$c(S'') > p - 1;$$

3° Si $c\left(\frac{a_n}{\Delta\theta_{n-1}}\right) \leq 0$, *nous essayerons* $c\left(\frac{a_n}{\Delta\theta_n}\right)$; soit p un nombre négatif ou nul et inférieur à $c\left(\frac{a_n}{\Delta\theta_n}\right)$, on a

$$c(S'') > p - 1.$$

13. Remarques. — L'énoncé précédent fait intervenir les nombres caractéristiques des suites $\frac{a_n}{\Delta\theta_n}$ et $\frac{a_n}{\Delta\theta_{n-1}}$; on peut, du reste, estimer ces nombres en utilisant $c(a_n)$, $c\left(\frac{1}{\Delta\theta_n}\right)$ et $c\left(\frac{1}{\Delta\theta_{n-1}}\right)$ et appliquant la règle concernant le nombre caractéristique d'un produit.

Les nombres $c\left(\frac{1}{\Delta\theta_n}\right)$, $c\left(\frac{1}{\Delta\theta_{n-1}}\right)$ et les nombres caractéristiques supérieurs correspondants ou encore les éléments caractéristiques des différences $\Delta\theta_n$, $\Delta\theta_{n-1}$ sont des constantes attachées à la suite de comparaison.

Dans le cas où $\theta_n = e^n$, ces nombres sont égaux à $+1$.

Si $\theta_n = n^\alpha$, les nombres en question sont égaux à $\frac{\alpha - 1}{\alpha}$; si $\theta_n = \log n$, ils sont infinis négatifs, etc.

Comme on a

$$\frac{\log\frac{1}{\Delta\theta_{n-1}}}{\log\theta_n}=-1+\frac{1}{\log\theta_n}\log\frac{1}{1-\frac{\theta_{n-1}}{\theta_n}},\qquad \theta_{n-1}<\theta_n,\qquad \lim_{n=\infty}\theta_n=\infty,$$

on voit que le nombre $c\left(\frac{1}{\Delta\theta_{n-1}}\right)$ est au plus égal à 1.

Si l'on applique en particulier les critères précédents à l'étude de la convergence de la série $\Sigma\theta_n^{-\alpha}$, déduite de la suite $\theta_n^{-\alpha}$ dont le nombre caractéristique est α, on voit que cette série sera convergente dès que

$$\alpha+c\left(\frac{1}{\Delta\theta_{n-1}}\right)>1$$

ou

$$\alpha>1-c\left(\frac{1}{\Delta\theta_{n-1}}\right).$$

On voit ainsi que $1-c\left(\frac{1}{\Delta\theta_{n-1}}\right)$ est une limite supérieure pour l'exposant de convergence (1) de la suite θ_n qui joue, comme on sait, un rôle important dans la théorie des fonctions.

Le critère suffisant de convergence donné par le théorème A′ est un critère de convergence absolue, puisque le nombre caractéristique ne dépend que du module; on peut le compléter de diverses façons. Dans le cas des séries à termes positifs, on peut donner des critères suffisants de divergence analogues (en utilisant les nombres caractéristiques supérieurs) et correspondant au théorème B (n° 7).

Nous n'insistons pas davantage sur ce point, parce que les critères donnés par la méthode précédente peuvent être obtenus par comparaison avec les séries que M. Dini (2) forme en partant d'une série divergente à termes positifs, ce qui revient à construire la suite θ_i en se donnant θ_0 et les différences $\Delta\theta_{i-1}$.

On peut enfin, et particulièrement dans le cas des séries à termes de signes quelconques ou à termes complexes, utiliser la formule

(1) Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 18 et suiv.

(2) Voir *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. 4, p. 224, n°s 37 et suiv.

souvent désignée sous le nom de *formule de transformation d'Abel* (¹).

Elle s'applique aux séries de la forme

$$\Sigma a_n b_n.$$

Nous poserons

$$B''_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1}$$

ou, si la série Σb_n est convergente,

$$B'_n = -(b_n + b_{n+1} + \ldots);$$

nous avons donc

$$\Delta B'_n = b_n, \qquad \Delta B''_n = b_n$$

et, par suite,

$$a_n b_n = a_n \Delta B'_n = a_n B'_{n+1} - a_{n-1} B'_n - B'_n (a_n - a_{n-1}) = \Delta(a_{n-1} B'_n) - B'_n \Delta a_{n-1};$$

de même

$$a_n b_n = \Delta(a_{n-1} B''_n) - B''_n \Delta a_{n-1}.$$

Bref, en désignant, suivant les cas, B'_n ou B''_n par B_n,

$$a_n \Delta B_n = a_n b_n = \Delta(a_{n-1} B_n) - B_n \Delta a_{n-1}.$$

La sommation de la série $\Delta(a_{n-1} B_n)$ est immédiate; en estimant le nombre caractéristique des restes ou celui des sommes de ses premiers termes, ceux de B_n et de $\frac{\Delta a_{n-1}}{\Delta \theta_{n-1}}$ ou $\frac{\Delta a_{n-1}}{\Delta \theta_n}$, et appliquant les théorèmes antérieurs, on estimera le nombre caractéristique des restes ou des sommes des premiers termes de la série $\Sigma a_n b_n$. Tous ces nombres caractéristiques sont relatifs à la même suite de comparaison θ_n.

Le parallélisme avec le cas des intégrales est assez manifeste pour que les indications précédentes puissent suffire. On peut ainsi, en suivant la même voie que plus haut (n^os^ 7 à 11), démontrer l'existence de l'abscisse de convergence des séries de Dirichlet et des séries analogues et en retrouver l'expression de cette abscisse. La suite de

(¹) *Voir*, au sujet de cette formule, *Encyclopédie des Sciences mathematiques*, article I, 4, n° 14. *Voir* aussi un article de M. E. Bortolotti, *Il metodo della Sommazione per parti* (*Giornale di Mathematiche di Battaglini*, vol. LIV, 1916).

comparaison se déduit de l'étude asymptotique du terme général : dans le cas d'une série de Dirichlet $\Sigma b_n e^{-\lambda_n z}$, elle est $\theta_n = e^{\lambda_n}$ (1).

CHAPITRE II.

14. Nombre caractéristique d'un groupe de fonctions. — M. Liapounoff appelle *nombre caractéristique d'un groupe de fonctions* le plus petit des nombres caractéristiques des fonctions composant le groupe ; il a démontré (p. 229, théorème I) qu'*étant donné un système différentiel linéaire*

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{s\alpha}x_\alpha \qquad (s = 1, 2, \ldots, \alpha), \tag{1}$$

où les p désignent des fonctions de t continues (2) *réelles bornées, toute solution de ce système* (*autre que* $x_1 = x_2 = \ldots = x_\alpha = 0$) *a un nombre caractéristique fini*.

La démonstration qu'il en a donnée prouve, de plus, que si $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$ est la solution considérée, ces fonctions étant réelles, le nombre caractéristique supérieur de $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_\alpha^2}$ est également fini ; et si les x sont complexes il en est de même pour $\sqrt{|x_1^2| + \ldots + |x_\alpha^2|}$.

Nous appellerons *nombre caractéristique supérieur d'un groupe de fonctions* de la variable réelle t le nombre caractéristique supérieur de la racine carrée de la somme des carrés de leurs modules.

C'est aussi le nombre caractéristique supérieur de la somme des modules, car on a

$$1 < \frac{|x_1| + \ldots + |x_\alpha|}{\sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_\alpha|^2}} < 1 + \alpha(\alpha - 1).$$

Le *rayon de convergence de l'ensemble de plusieurs séries de Taylor*

(1) Ces questions bien connues, surtout depuis la *Thèse* de M. Cahen, sont abordées à un point de vue un peu différent dans un article du *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XLVI, 1918.

(2) Ces hypothèses pourraient être élargies, notamment en ce qui concerne la continuité et la nature réelle des fonctions.

sera, par définition, le plus petit des rayons de convergence de ces diverses séries. C'est encore le logarithme du nombre caractéristique du groupe des coefficients d'une même puissance de la variable considérés comme fonctions de l'exposant de cette puissance (n° 4). Cette définition va nous conduire à un théorème analogue à la proposition de M. Liapounoff que nous venons de rappeler.

Considérons, par exemple, deux suites

$$(2)\qquad \begin{cases} (Y) & y_0, \quad y_1, \quad \ldots, \quad y_i, \quad \ldots, \\ (Z) & z_0, \quad z_1, \quad \ldots, \quad z_i, \quad \ldots \end{cases}$$

qui se déterminent de proche en proche par les équations de récurrence linéaires

$$(3)\qquad \begin{cases} y_{i+1} = \alpha_i y_i + \beta_i z_i, \\ z_{i+1} = \gamma_i y_i + \delta_i z_i, \end{cases}$$

que nous pouvons écrire encore sous forme d'équations aux différences

$$(4)\qquad \begin{cases} \Delta y_i = y_{i+1} - y_i = (\alpha_i - 1) y_i + \beta_i z_i, \\ \Delta z_i = z_{i+1} - z_i = \gamma_i y_i + (\delta_i - 1) z_i, \end{cases}$$

dont les propriétés rappellent celles des équations (1). Par exemple la solution générale y_i, z_i du système (3) s'exprime par une combinaison linéaire de deux solutions particulières y_i', z_i' et y_i'', z_i'',

$$(5)\qquad y_i = c' y_i' + c'' y_i'', \qquad z_i = c' z_i' + c'' z_i'',$$

où c' et c'' sont des constantes indépendantes de l'indice i, dont on peut disposer pour donner à y_0 et z_0 telles valeurs qu'on veut. Supposons que α_i, β_i, γ_i, δ_i restent inférieurs en module à un nombre fixe M et que, de plus, les modules des déterminants $\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i$ restent supérieurs à un nombre m, *toute solution* (2) *du système* (3) (*autre que la solution* $y_i = z_i = 0$, *toujours écartée dans ce qui suit*) *donne naissance à deux séries de Taylor* $\Sigma y_n x^n$, $\Sigma z_n x^n$ *dont l'ensemble a un rayon de convergence fini et différent de zéro.*

Pour le démontrer, nous observons d'abord que les solutions

$$\begin{cases} (Y') & Y_0, \quad Y_1, \quad Y_2, \quad \ldots, \quad Y_n, \quad \ldots \\ (Z') & Z_0, \quad Z_1, \quad Z_2, \quad \ldots, \quad Z_n, \quad \ldots \end{cases}$$

du système

$$(3') \qquad \begin{cases} Y_{i+1} = M(Y_i + Z_i), \\ Z_{i+1} = M(Y_i + Z_i) \end{cases}$$

dominent évidemment celles du système (3) quand on a

$$Y_0 > |y_0|, \qquad Z_0 > |z_0|.$$

Comme de plus

$$Y_{i+1} = Z_{i+1} = (Y_0 + Z_0) M^i,$$

le rayon de convergence de $\Sigma y_n x^n$ et $\Sigma z_n x^n$ n'est pas inférieur à $\frac{1}{M}$.

D'autre part, on a

$$q_i = \frac{y_{i+1}^2 + z_{i+1}^2}{y_i^2 + z_i^2} = \frac{(\alpha_i^2 + \gamma_i^2) y_i^2 + 2(\alpha_i \beta_i + \gamma_i \delta_i) y_i z_i + (\beta_i^2 + \delta_i^2) z_i^2}{y_i^2 + z_i^2};$$

si nous supposons réels tous les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ainsi que y_0, z_0, il en sera de même de $y_i, z_i, \ldots$ et le rapport précédent est compris entre les deux racines S_i', S_i'' de l'équation en S

$$\begin{vmatrix} \alpha_i^2 + \gamma_i^2 - S & \alpha_i \beta_i + \gamma_i \delta_i \\ \alpha_i \beta_i + \gamma_i \delta_i & \beta_i^2 + \delta_i^2 - S \end{vmatrix} = 0.$$

Ces racines sont positives et évidemment inférieures à $4M^2$. Si nous supposons $S_i' \geq S_i''$, comme on a

$$S_i' S_i'' = (\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i)^2 > m^2,$$

on peut écrire

$$S_i' > q_i > S_i'' > \frac{m^2}{S_i'} > \frac{m^2}{4M^2}.$$

On en conclut qu'il existe des valeurs de x telles que le produit $(y_i^2 + z_i^2) x^{2i}$ croît indéfiniment avec i; c'est dire que l'un au moins des produits $y_i x^i$, $z_i x^i$ ne peut rester borné, le rayon de convergence des séries $\Sigma y_i x^i$, $\Sigma z_i x^i$ est donc fini. La proposition est démontrée. Elle s'applique, ainsi que les suivantes, au cas où il y aurait p suites analogues à (2) déterminées par des équations de récurrence linéaires, des hypothèses analogues étant faites sur les coefficients des substitutions et sur leurs déterminants. On trouvera facilement les petites modifications à apporter aux inégalités précédentes.

Enfin, en suivant la même voie que M. Liapounoff (p. 231), on étend

le résultat d'abord au cas des solutions complexes d'équations de récurrence à coefficients réels, puis au cas des équations à coefficients complexes.

Il ne peut exister plus de deux rayons de convergence distincts pour l'ensemble des deux séries de Taylor associées aux diverses solutions de (3).

Ce théorème est une conséquence du précédent et s'établit comme le théorème correspondant de M. Liapounoff (théorème II, p. 232).

Une équation différentielle linéaire d'ordre n equivaut, comme on sait, à un système de n équations linéaires du premier ordre; la théorie de M. Liapounoff s'applique donc aux solutions d'une telle équation.

Semblablement, une relation de récurrence linéaire, liant un terme d'une suite aux p termes précédents, se remplace par p relations de récurrence linéaires entre les termes de p suites, relations liant les termes de rang i aux termes de rang $i-1$. Ainsi, en prenant $p=2$

$$y_{i+2}=\alpha_i y_{i+1}+\beta_i y_i$$

et introduisant la nouvelle suite (z) déterminée par

$$y_{i+1}=y_i+z_i,$$

on a le système

$$\begin{aligned} y_{i+1}&=y_i+z_i,\\ z_{i+1}&=(\alpha_i-1)(y_i+z_i)+\beta_i y_i, \end{aligned}$$

qui est bien de la forme voulue.

On pourra donc adapter les propositions que nous donnons ici aux suites déterminées ainsi par des relations de récurrence liant $p+1$ termes consécutifs. Par exemple :

Si les coefficients d'une série de Taylor $\Sigma y_i x^i$ se déterminent de proche en proche par une relation de récurrence linéaire à coefficients variables, mais bornés,

$$y_{i+p}=\alpha_{i,1}y_{i+p-1}+\alpha_{i,2}y_{i+p-2}+\ldots+\alpha_{i,p}y_i. \tag{6}$$

la série admet un rayon de convergence fini et non nul. Les coefficients de la série dépendent encore de p constantes arbitraires et il

y a au plus p rayons de convergence distincts pour les séries qu'on peut ainsi obtenir.

Ces résultats sont une généralisation de ceux indiqués par Poincaré dans son Mémoire *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* (*American Journal*, t. VII, 1885). Les coefficients des relations de récurrence telles que (6) y sont supposés fonctions rationnelles de l'indice i; alors que nous supposons ces fonctions quelconques.

La notion de nombre caractéristique d'un groupe de fonctions peut être généralisée en prenant, comme plus haut (n° 3), une fonction de comparaison $\theta(t)$ autre que la fonction exponentielle : c'est toujours le plus petit des nombres caractéristiques des fonctions composant le groupe. Dans un article antérieur (*Congrès des Sociétés savantes*, 1913 : *Sciences*) j'ai donné, à ce propos, l'extension du théorème de M. Liapounoff aux solutions de systèmes différentiels linéaires dont les coefficients satisfont à certaines conditions de croissance différentes de celles indiquées ci-dessus.

On pourra de même parler du nombre caractéristique généralisé (n° 12) de plusieurs suites; par exemple, en prenant pour suite de comparaison $\theta_i = i$ et supposant qu'il y ait deux suites (y), (z), dont les séries associées $\Sigma y_i x^i$, $\Sigma z_i x^i$ convergent pour $|x| < 1$, le nombre caractéristique c des deux suites donne ce qu'on peut appeler l'ordre ω des deux séries sur le cercle $|x| = 1$ par la relation $c = 1 - \omega$ (*voir* n° 12). Il serait évidemment possible de donner pour ces nombres caractéristiques généralisés des suites et pour les systèmes de récurrence des propositions analogues à celles qui concernent les nombres caractéristiques ordinaires et les systèmes différentiels linéaires.

Remarque. Dans le cas où l'on a une seule suite (y) satisfaisant aux équations de récurrence

$$y_{i+1} = \alpha_i y_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

la proposition précédente montre que si dans une série de Taylor $\Sigma y_i x^i$ le module du rapport α_i d'un coefficient au précédent reste compris

entre deux nombres fixes, le rayon de convergence de la série est fini et différent de zéro.

La suite des α_i détermine alors les γ_i à un facteur constant près : il est naturel de se demander quelles relations existent entre les points singuliers des séries de Taylor

$$f(x)=\Sigma\gamma_i x^i, \qquad g(x)=\Sigma\alpha_i x^i.$$

Voici une remarque intéressante à ce sujet.

On peut écrire

$$\frac{f(x)-\gamma_0}{x}=\mathrm{F}(x).$$

$\mathrm{F}(x)$ est une fonction régulière à l'origine, admettant évidemment les mêmes points singuliers que $f(x)$. D'autre part,

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x)&=\gamma_1+\gamma_2 x+\ldots+\gamma_{i+1}x^i+\ldots\\&=\gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2 x+\ldots+\gamma_{i+1}\alpha_{i+1}x^i+\ldots\end{aligned}$$

se déduit de $f(x)$ et de $g(x)$ par l'opération de M. Hadamard (*voir* n° 5) ; c'est dire qu'en désignant par c, c', γ les affixes de points singuliers de F, f et g, on a

$$c=c'\gamma,$$

d'où $\gamma=\frac{c}{c'}$. Mais si γ a cette forme, il ne faut pas en conclure que tout quotient $\frac{c}{c'}$ donne l'affixe d'un point singulier. En effet, du moment que $|\alpha_i|$ et $\frac{i}{\alpha_i}$ sont bornés, $\frac{1}{i}\log|\alpha_i|$ tend vers zéro quand i devient infini, le rayon de convergence de la série $g(x)$ est donc égal à l'unité ; ceci nous montre déjà qu'il faudrait écarter les quotients $\frac{c}{c'}$ de module inférieur à l'unité.

Une remarque de même nature s'applique aux séries

$$\mathrm{Y}(x)=\Sigma\gamma_i x^i, \qquad \mathrm{Z}(x)=\Sigma\varepsilon_i x^i,$$

$$\mathrm{A}(x)=\Sigma\alpha_i x^i, \qquad \mathrm{B}(x)=\Sigma\beta_i x^i, \qquad \mathrm{C}(x)=\Sigma\gamma_i x^i, \qquad \mathrm{D}(x)=\Sigma\delta_i x^i,$$

associées respectivement aux suites (γ_i), (ε_i), (α_i), (β_i), (γ_i), (δ_i) constituées par les divers facteurs figurant dans les seconds membres des équations (3) ; désignons par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ les affixes des points singuliers

de $Y(x)$, par $\zeta, \zeta', \ldots$ ceux des points singuliers de $Z(x)$, par a, b, c, d les mêmes éléments pour $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$, on a nécessairement des relations de la forme

$$a = \frac{\eta_1'}{\eta_1}, \qquad b = \frac{\zeta}{\eta_1''}, \qquad c = \frac{\eta_1'''}{\zeta'}, \qquad d = \frac{\zeta''}{\zeta'''}.$$

Il est facile de former des exemples.

Nous nous contentons de signaler ici ces questions, une étude plus approfondie nous entraînerait loin de l'objet du présent travail.

15. Équations de récurrence attachées a un système différentiel et a des valeurs de la variable en progression arithmétique. — Soit un système différentiel linéaire

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = py + qz, \\ \dfrac{dz}{dt} = ry + sz, \end{cases}$$

où les coefficients p, q, r, s sont des fonctions de t réelles (1) et bor-

(1) Du moment que la variable t reste réelle et que les résultats énoncés ici par un système à deux fonctions inconnues y, z s'appliquent encore au cas où il y a n fonctions inconnues, l'hypothèse que les coefficients p, q, r, s sont réels ne diminue pas la généralité. En effet, si le système linéaire comportait n fonctions inconnues imaginaires, si ses coefficients étaient imaginaires, son étude se ramène (pour t réel) à celle d'un système à $2n$ fonctions inconnues et à coefficients réels. Par exemple, si l'on a

$$p = p' + ip'', \quad q = q' + iq'', \quad r = r' + ir'',$$
$$s = s' + is'', \quad y = y' + iy'', \quad z = z' + iz'', \quad i = \sqrt{-1},$$

le système (7) équivaut, pour t réel, à

$$\frac{dy'}{dt} = p'y' - p''y'' + q'z' - q''z'',$$
$$\frac{dz'}{dt} = r'y' - r''y'' + s'z' - s''z'',$$
$$\frac{dy''}{dt} = p''y' + p'y'' + q''z' + q'z'',$$
$$\frac{dz''}{dt} = r''y' + r'y'' + s''z' + s'z'',$$

où tous les éléments sont réels.

nées en valeur absolue, il existe un nombre μ tel que

$$|p|<\mu, \qquad |q|<\mu, \qquad |r|<\mu, \qquad |s|<\mu.$$

Considérons une solution réelle de ce système; les fonctions inconnues $y(t)$, $z(t)$ prennent respectivement pour

$$t=0, \qquad t=T, \qquad t=2T, \qquad \ldots, \qquad t=iT$$

les valeurs

$$\begin{matrix} y_0, & y_1, & y_2, & \ldots, & y_i, & \ldots \\ z_0, & z_1, & z_2, & \ldots, & z_i, & \ldots \end{matrix}$$

Laissons y_0, z_0 arbitraires; les valeurs y_i, z_i peuvent se déterminer de proche en proche par des formules de récurrence

$$(8) \qquad \begin{cases} y_{i+1}=\alpha_i y_i+\beta_i z_i, \\ z_{i+1}=\gamma_i y_i+\delta_i z_i, \end{cases}$$

dont les coefficients s'interprètent aisément : α_i et γ_i sont les valeurs pour $t=(i+1)T$ de la solution $y=\eta_1(t)$, $z=\zeta_1(t)$ du système (7) déterminée par les conditions

$$\eta_1(iT)=1, \qquad \zeta_1(iT)=0,$$

β_i, γ_i sont les valeurs pour $t=(i+1)T$ de la solution $y=\eta_2(t)$, $z=\zeta_2(t)$ de (7) déterminée par

$$\eta_2(iT)=0, \qquad \zeta_2(iT)=1.$$

Ces coefficients satisfont aux conditions indiquées au numéro précédent. En effet, η_1 et ζ_1 sont dominés (1) respectivement par les solutions de

$$\frac{dy}{dt}=\mu(y+z),$$
$$\frac{dz}{dt}=\mu(y+z),$$

satisfaisant aux mêmes conditions initiales, c'est dire qu'on a

$$|\eta_1(t)|<\frac{1}{2}[e^{2\mu(t-iT)}+1], \qquad |\zeta_1(t)|<\frac{1}{2}[e^{2\mu(t-iT)}-1]$$

(1) *Voir* un Mémoire de M. Goursat, *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXIII, 1906, p. 433.

et des inégalités analogues pour η_2 et ζ_2 ; elles entraînent les suivantes :

$$|\alpha_i| < \frac{1}{2}[e^{2\mu T}+1], \qquad |\gamma_i| < \frac{1}{2}[e^{2\mu T}-1],$$

$$|\beta_i| < \frac{1}{2}[e^{2\mu T}-1], \qquad |\delta_i| < \frac{1}{2}[e^{2\mu T}+1].$$

Les coefficients des formules (8) sont donc bornés ; quant au déterminant qu'ils forment, il est, d'après une formule connue,

$$\alpha_i\delta_i - \beta_i\gamma_i = e^{\int_{iT}^{(i+1)T}(p+s)\,dt}$$

et, par suite, sa valeur absolue

$$|\alpha_i\delta_i - \beta_i\gamma_i| > e^{-2\mu T}$$

est bornée inférieurement.

L'ensemble des séries de Taylor $\Sigma y_i x^i$, $\Sigma z_i x^i$ associées ainsi à une solution déterminée $y(t)$, $z(t)$ du système différentiel (7) a donc un rayon de convergence fini R. Nous allons le rattacher au nombre caractéristique de cette solution.

16. Relations entre les nombres caractéristiques des solutions d'un système différentiel linéaire et les rayons de convergence des séries de Taylor déterminées par les équations précédentes de récurrence. — Observons d'abord que le nombre caractéristique du carré x^2 d'une fonction (réelle) $x(t)$ est double de celui de x, puisque $\log x^2 = 2\log x$ et que le nombre caractéristique de la somme $y^2 + z^2$ des carrés de deux fonctions réelles $y(t)$, $z(t)$ est double du nombre caractéristique de l'ensemble de ces deux fonctions [(p. 136, note (1))].

De même le rayon de convergence de la série de Taylor associée à la suite $y_i^2 + z_i^2$ est le carré du rayon de convergence des séries associées aux suites de nombres réels y_i, z_i.

Cela dit, posons

$$f(t) = y^2 + z^2$$

et comparons les plus grandes limites pour t et t_i infinis positifs de $\frac{\log f(t)}{t}$ et de $\frac{\log f(t_i)}{t_i}$, où $t_i = i\mathrm{T}$ est le plus grand multiple de T contenu dans t.

Nous avons

$$\frac{\log f(t)}{t} = \frac{\log f(t)}{t_i}\,\frac{t_i}{t}; \tag{9}$$

la dernière fraction tend vers l'unité; tout revient à étudier

$$\frac{\log f(t)}{t_i} = \frac{\log f(t_i)}{t_i} + \frac{\log f(t) - \log f(t_i)}{t_i}.$$

Or

$$\frac{d\log f(t)}{dt} = 2\,\frac{y\dfrac{dy}{dt} + z\dfrac{dz}{dt}}{y^2+z^2} = 2\,\frac{p\,y^2 + (q+r)\,yz + sz^2}{y^2+z^2}$$

en vertu des hypothèses antérieures (n° 15) $\left|\frac{d\log f(t)}{dt}\right| < 4\mu$, par suite

$$-4\mu T < -4\mu(t-t_i) < |\log f(t) - \log f(t_i)| < 4\mu(t-t_i) < 4\mu T.$$

La fraction $\frac{\log f(t) - \log f(t_i)}{t_i}$ tend donc vers zéro quand t et i deviennent infinis, elle est négligeable dans la recherche de la plus grande limite du second membre de la relation (9); la plus grande limite de $\frac{\log f(t)}{t}$ et de $\frac{\log f(t_i)}{t_i} = \frac{1}{T}\,\frac{\log f(iT)}{i}$ sont égales. Par suite :

Le nombre caractéristique l de la solution y, z du système (7) *est*

$$l = \tfrac{1}{T}\log R. \tag{10}$$

R *étant le rayon de convergence de l'ensemble des séries de Taylor associées aux suites* y_i, z_i *du n°* 15.

17. Exemples. Extension des résultats précédents. — Quand le système différentiel linéaire est à coefficients constants, les nombres caractéristiques sont égaux aux parties réelles changées de signe des racines de l'équation caractéristique (*voir* le Mémoire de M. Liapounoff, p. 269); la propriété précédente se vérifie immédiatement sur les expressions bien connues des solutions du système.

Si le système (7) est à coefficients périodiques, on prend pour T la période, la vérification est encore facile (*Ibid.*, p. 392 à 396; Poincaré,

Méthodes nouvelles, p. 167-179). Dans ces deux cas, le système d'équations de récurrence est à coefficients constants.

On peut étendre les résultats précédents aux nombres caractéristiques généralisés. Si $\theta(t)$ est la fonction de comparaison, nous savons que $\log\theta(t)$ croît indéfiniment avec t, et nous admettrons que le quotient $\frac{\log\theta(t_i)}{\log\theta(t)}$, où $t_i = i\mathrm{T} < t < t_{i+1}(i+1)\mathrm{T}$ tend vers l'unité quand i croît indéfiniment. On a du reste, en posant $t = t_i + h$,

$$\log\theta(t) - \log\theta(t_i) + h\frac{\theta'(t')}{\theta(t')} \qquad (t_i < t' < t);$$

cette dernière hypothèse est donc vérifiée dès que la dérivée logarithmique $\frac{\theta'(t)}{\theta(t)}$ de $\theta(t)$ reste finie quand t devient infini.

Dans ces conditions, le raisonnement du n° 16 reste valable. Par exemple, si l'on prend $\theta(t) = t$ en considérant une solution $y(t)$, $z(t)$ du système (7) et les suites y_i, z_i vérifiant les équations de récurrence (8) et telles qu'on ait

$$y_0 = y(0), \qquad z_0 = z(0),$$

le nombre caractéristique l de cette solution et le rayon de convergence R de $\Sigma y_i x^i$, $\Sigma z_i x^i$ sont liés par la relation précédente (10) et, de plus, l'ordre ω des séries $\Sigma y_i \mathrm{R}^i \xi^i$, $\Sigma z_i \mathrm{R}^i \xi^i$ sur leur cercle de convergence (de rayon égal à l'unité) est lié au nombre caractéristique c_t de l'ensemble $e^{lt}y(t)$, $e^{lt}z(t)$ par rapport à t par la relation (n° 12)

$$1 - \omega = c_t.$$

La vérification est facile pour les systèmes à coefficients constants ou périodiques.

18. Systèmes normaux de solutions. — La définition des systèmes ou groupes normaux de solutions d'un système différentiel linéaire (p. 232 à 238 du Mémoire de M. Liapounoff) s'applique également aux solutions d'un système E d'équations aux différences linéaires : n solutions distinctes d'un système E à n suites inconnues constituent un *système normal* ou *groupe normal* si l'ensemble des n séries de Taylor, associées à toute combinaison linéaire d'un nombre quelconque p de

ces solutions, a un rayon de convergence égal à celui de l'ensemble des np séries de Taylor associées aux solutions combinées. Les premières propriétés des systèmes normaux subsistent également (théorèmes I à IV), leurs démonstrations restent valables, mais le théorème V appelle de petites modifications que nous indiquons brièvement; pour simplifier l'écriture, prenons $n = 3$.

Considérons le système

$$(E)\qquad \begin{cases} x_{i+1} = \alpha_i x_i + \beta_i y_i + \gamma_i z_i, \\ y_{i+1} = \alpha'_i x_i + \beta'_i y_i + \gamma'_i z_i, \\ z_{i+1} = \alpha''_i x_i + \beta''_i y_i + \gamma''_i z_i. \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= (\alpha_i - 1) x_i + \beta_i y_i + \gamma_i z_i, \\ \Delta y_i &= \alpha'_i x_i + (\beta'_i - 1) y_i + \gamma'_i z_i, \\ \Delta z_i &= \alpha''_i x_i + \beta''_i y_i + (\gamma''_i - 1) z_i. \end{aligned}$$

En posant

$$\Theta_i = \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \\ \alpha'_i & \beta'_i & \gamma'_i \\ \alpha''_i & \beta''_i & \gamma''_i \end{vmatrix}, \qquad \Delta_i = \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x'_i & y'_i & z'_i \\ x''_i & y''_i & z''_i \end{vmatrix},$$

x_i, y_i, z_i; x'_i, y'_i, z'_i; x''_i, y''_i, z''_i étant trois solutions distinctes de (E), on a évidemment

$$\Delta_{i+1} = \Theta_i \Delta_i$$

et

$$\Delta_i = \Delta_0 \Theta_0 \Theta_1 \dots \Theta_{i-1}.$$

L'égalité précédente montre que *le produit des rayons de convergence des n ensembles de séries de Taylor construites avec n solutions indépendantes de* (E) *ne peut être supérieur au rayon de convergence de la série de Taylor associée à*

$$u_i = \Theta_0 \Theta_1 \dots \Theta_{i-1}.$$

C'est l'analogue du théorème V (p. 235).

Au corollaire donné par M. Liapounoff (p. 236) correspond l'énoncé suivant : « S'il existe un système de n solutions de (E) tel que le produit des rayons de convergence des n ensembles de séries de Taylor construites avec ces solutions égale le rayon de convergence de la série associée à u_i, le système en question est normal. »

19. Systèmes linéaires réguliers d'équations différentielles et d'équations aux différences. — Parmi les systèmes d'équations différentielles linéaires qu'il étudie (systèmes à coefficients bornés), M. Liapounoff (p. 237-242) a distingué les *systèmes réguliers*. Rappelons-en la définition : Soient un système

$$(11) \qquad \frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les nombres caractéristiques d'un groupe normal de ses solutions; le déterminant Δ qu'elles forment ne diffère que par un facteur constant de l'expression

$$e^{\int \sum_{s=1}^{n} p_{ss}\, dt}.$$

Désignons par m et μ les nombres caractéristiques ordinaire et supérieur de Δ: ceux de $\frac{1}{\Delta}$ sont μ et $-m$, et l'on a

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = m - \mu;$$

le nombre

$$\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n + \mu$$

est négatif ou nul. S'il est nul, le système (11) est dit *régulier* (¹); dans tous les cas σ peut être appelé « la mesure de l'irrégularité du système (11) ».

M. Liapounoff a montré l'importance de ces notions dans la recherche des solutions d'un système différentiel non linéaire S asymptotique à une solution connue (p. 243-254); on peut résumer ses résultats de la façon suivante :

Soit L le système d'équations aux variations correspondant à S et à la solution connue; L est un système linéaire; si ce système est régulier et s'il admet p solutions distinctes à nombres caractéristiques positifs, S admet une famille de solutions asymptotiques (pour les valeurs positives indéfiniment croissantes de la variable indépendante t) à la solution connue, dépendant au moins de p paramètres

(¹) Pour qu'un système soit régulier, il faut évidemment que $\lambda - \mu = 0$.

arbitraires. Si L est irrégulier, le résultat reste valable pourvu qu'on désigne par p le nombre des solutions distinctes de L dont les nombres caractéristiques surpassent la mesure de son irrégularité (¹).

D'une façon analogue, un système d'équations de récurrence (E) sera dit *régulier* si le produit $R_1 R_2 \dots R_n$ des rayons de convergence des ensembles de séries de Taylor associées aux solutions d'un système normal est égal à l'inverse du rayon de convergence ρ de la série associée à la suite $\frac{1}{u_i}$, où u_i est l'expression définie au n° 18. Si le système n'est pas régulier, la mesure de son irrégularité est donnée par le logarithme changé de signe du produit $\rho R_1 R_2 \dots R_n$, produit qui est inférieur à l'unité.

Les systèmes d'équations de recurrence dont les coefficients sont constants sont réguliers ; mais dans le cas des coefficients variables il paraît bien difficile de reconnaître si un système (E) donné est régulier ou non. On peut le faire toutefois pour des systèmes d'un type particulier analogue au système différentiel étudié, du même point de vue, par M. Liapounoff (p. 237); indiquons le résultat dans le cas de deux équations.

Le système

$$(12) \qquad \begin{cases} x_{i+1} = \alpha_i x_i, \\ y_{i+1} = \beta_i x_i + \gamma_i y_i \end{cases}$$

admet comme solutions particulières

$$x_i^1 = \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{i-1}, \qquad y_i^1 = \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{i-1} \left| \frac{\beta_0}{\gamma_0} + \frac{\alpha_0 \beta_1}{\gamma_0 \gamma_1} + \dots + \frac{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{i-2} \beta_{i-1}}{\gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{i-1}} \right|$$

et

$$x_i^2 = 0, \qquad y_i^2 = \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{i-1};$$

la solution générale est une combinaison linéaire de celles-là. *Pour*

(¹) Dans le Chapitre II d'un Mémoire inséré dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure* (3e série, t. XXXIII, 1911), j'ai donné une démonstration du théorème en question avec des hypothèses un peu plus générales que celles de M. Liapounoff, en supposant toutefois le système L régulier; mais on peut encore étendre la démonstration au cas des systèmes irréguliers.

qu'il soit régulier, il faut et il suffit que chacune des expressions

$$\sqrt[i]{|\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_{i-1}|}, \qquad \sqrt[i]{|\gamma_0\gamma_1\dots\gamma_{i-1}|}$$

tende vers une limite quand i augmente indéfiniment.

On peut donner de ce théorème une démonstration analogue à celle de M. Liapounoff pour la proposition correspondante; on peut aussi l'en déduire en construisant un système

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax, \\ \dfrac{dy}{dt} = bx + cy, \end{cases}$$

auquel cette proposition s'applique et où les solutions $x(t)$, $y(t)$ prennent pour les valeurs entières i de la variable t les valeurs x_i, y_i déterminées par les relations de récurrence (12). On prend (¹) par exemple, pour $i < t < i+1$,

$$a = \log\alpha_i, \qquad c = \log\gamma_i, \qquad b = \frac{\beta_i}{\alpha_i - \gamma_i}\log\frac{\alpha_i}{\gamma_i}.$$

Le système (13) étant ainsi formé, on utilise la proposition de M. Liapounoff et celle que nous avons donnée à la fin du n° 16.

20. Systèmes réductibles. — L'analogie existant entre équations de récurrence et équations différentielles se poursuit encore à propos du caractère d'invariance des nombres caractéristiques signalé par M. Liapounoff (p. 241). Il prend dans le cas des suites déterminées par des équations linéaires de récurrence la forme que voici : Étant donné un système de telles équations

$$(14)\qquad \begin{cases} y_{i+1} = \alpha_i y_i + \beta_i z_i \\ z_{i+1} = \gamma_i y_i + \delta_i z_i \end{cases} \qquad (i = 0, 1, 2\dots),$$

si l'on effectue sur les termes successifs des suites solutions (y), (z)

(¹) M. Liapounoff suppose continus les coefficients des équations différentielles linéaires qu'il étudie; ses résultats restent néanmoins valables si ces coefficients sont discontinus pour des valeurs isolées de la variable t, comme c'est ici le cas avec les valeurs adoptées pour a, b, c.

des substitutions linéaires

$$(15)\qquad \begin{cases} y_i = p_i Y_i + q_i Z_i, \\ z_i = r_i Y_i + s_i Z_i, \end{cases}$$

où les coefficients p_i, q_i, r_i, s_i, ... sont tous inférieurs en module à un nombre fixe K, et où les déterminants $p_i s_i - q_i r_i$ sont tous supérieurs en module à un nombre positif k, les nouvelles suites

$$(Y)\qquad Y_0,\ Y_1,\ \ldots,\ Y_i,\ \ldots,$$
$$(Z)\qquad Z_0,\ Z_1,\ \ldots,\ Z_i,\ \ldots$$

satisfont à un système de même forme que (14), soit

$$(16)\qquad \begin{cases} Y_{i+1} = A_i Y_i + B_i Z_i, \\ Z_{i+1} = C_i Y_i + D_i Z_i, \end{cases}$$

et ont même nombre caractéristique que les premières.

En effet, on voit d'abord que le nombre caractéristique des suites (Y), (Z) ne peut être inférieur à celui des suites primitives (y), (z), et, comme d'autre part, Y_i, Z_i s'expriment en fonction de y_i, z_i par les formules d'une substitution linéaire à coefficients également bornés, le nombre caractéristique des suites (y), (z) ne peut davantage être supérieur à celui des suites (Y), (Z); ces nombres sont donc égaux.

Les substitutions (15) appliquées à des solutions constituant un système normal le transforment en un système normal de solutions des équations (16).

On appelle réductibles les systèmes linéaires (14) d'équations de récurrence qu'une transformation (15) ramène à des équations (16) à coefficients A_i, B_i, C_i, D_i constants (c'est-à-dire indépendants de l'indice i).

Un système d'équations de récurrence à coefficients constants

$$(17)\qquad \begin{cases} y_{i+1} = \alpha y_i + \beta z_i, \\ z_{i+1} = \gamma y_i + \delta z_i \end{cases}$$

peut toujours, comme on sait, se ramener par une même substitution linéaire effectuée sur tous les groupes d'inconnues à l'une des formes

réduites

$$y_{i+1} = \lambda y_i, \qquad z_{i+1} = \mu z_i, \tag{18}$$

$$y_{i+1} = \lambda y_i, \qquad z_{i+1} = \lambda z_i + y_i, \tag{19}$$

λ et μ pouvant, de plus, être pris réels et positifs.

Pour les équations (18) la solution générale est

$$y_i = y_0 \lambda^i, \qquad z_i = z_0 \mu^i$$

et les séries de Taylor associées ont pour rayons de convergence $\frac{1}{|\lambda|}$ et $\frac{1}{|\mu|}$; elles représentent des fonctions admettant pour pôles simples les points $\frac{1}{\lambda}$ et $\frac{1}{\mu}$. Dans le cas des équations (19), on a pour solution générale

$$y_i = y_0 \lambda^i, \qquad z_i = z_0 \lambda^i + i y_0 \lambda^{i-1};$$

les séries de Taylor associées ont pour rayon de convergence $\frac{1}{|\lambda|}$; elles représentent des fonctions ayant pour pôle le point $\frac{1}{\lambda}$, l'ordre de multiplicité étant au plus égal à 2.

Les valeurs de λ et μ sont du reste données par l'équation caractéristique

$$(\alpha - \lambda)(\delta - \lambda) - \beta\gamma = 0.$$

21. Équations de récurrence non linéaires. Solutions asymptotiques à une solution donnée. — Imaginons un système non linéaire d'équations de récurrence

$$\begin{cases} Y_{i+1} = F_i(Y_i, Z_i) \\ Z_{i+1} = G_i(Y_i, Z_i) \end{cases} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots), \tag{20}$$

il permet de déterminer de proche en proche les termes successifs de deux suites

$$\begin{cases} (Y) & Y_0, & Y_1, & Y_2, & \ldots, \\ (Z) & Z_0, & Z_1, & Z_2, & \ldots \end{cases} \tag{21}$$

en partant des deux premiers qui restent arbitraires; l'indice i dont

sont affectées les lettres F et G dans les équations (20) indique que les opérations à faire pour passer de deux termes de même rang i des suites (21) aux termes suivants peuvent varier avec i.

Étant donnée une solution particulière

$$(Y^0) \qquad Y_0^0,\ Y_1^0,\ Y_2^0,\ \ldots,$$
$$(Z^0) \qquad Z_0^0,\ Z_1^0,\ Z_2^0,\ \ldots$$

pour étudier les solutions de (20) voisines de celle-là, nous ferons le changement de variables

$$Y_i = Y_i^0 + y_i,$$
$$Z_i = Z_i^0 + z_i;$$

les nouvelles inconnues y_i, z_i seront déterminées par les équations

$$(22) \qquad \begin{cases} y_{i+1} = F_i(Y_i^0 + y_i, Z_i^0 + z_i) - F_i(Y_i^0, Z_i^0), \\ z_{i+1} = G_i(Y_i^0 + y_i, Z_i^0 + z_i) - G_i(Y_i^0, Z_i^0), \end{cases}$$

dont les seconds membres s'annulent pour $y_i = z_i = 0$.

Quand $|y_i|$, $|z_i|$ sont infiniment petits, on est amené naturellement à substituer aux équations (22) celles qu'on obtient en réduisant les seconds membres à leur partie linéaire :

$$(23) \qquad \begin{cases} y_{i+1} = \alpha_i y_i + \beta_i z_i, \\ z_{i+1} = \gamma_i y_i + \delta_i z_i, \end{cases}$$

$$\alpha_i = \left| \frac{\partial F_i(Y_i, Z_i)}{\partial Y_i} \right|_0, \qquad \beta_i = \left| \frac{\partial F_i(Y_i, Z_i)}{\partial Z_i} \right|_0,$$
$$\gamma_i = \left| \frac{\partial G_i(Y_i, Z_i)}{\partial Y_i} \right|_0, \qquad \delta_i = \left| \frac{\partial G_i(Y_i, Z_i)}{\partial Z_i} \right|_0.$$

l'indice zéro indiquant qu'après le calcul des dérivées, on remplace Y_i et Z_i respectivement par Y_i^0 et Z_i^0.

Nous montrerons comment on peut utiliser ces équations (23) [qu'on peut appeler les équations aux variations du système (20) correspondant à la solution connue (Y^0), (Z^0) ou équations de première approximation] pour la recherche des solutions de (20) asymptotiques à la solution connue, c'est-à-dire telles que les valeurs correspondantes x_i, y_i tendent vers zéro avec $\frac{1}{i}$. Nous nous limiterons au

cas où le système (23) est à coefficients constants; l'étude du cas des coefficients variables, sans être au fond plus difficile, serait bien plus compliquée comme notations.

On peut admettre qu'on a ramené le système à la forme canonique; supposons qu'il s'agisse de la forme (18) et que les nombres λ, μ soient distincts. Tout revient à étudier un système (20) de la forme

$$(24) \qquad \begin{cases} y_{i+1} = \lambda y_i + \varphi_i(y_i, z_i), \\ z_{i+1} = \mu z_i + \psi_i(y_i, z_i), \end{cases}$$

où *toutes les fonctions* $\varphi_i(y, z)$, $\psi_i(y, z)$ *s'annulent ainsi que leurs dérivées premières pour* $y = z = 0$; *nous supposerons de plus ces dérivées uniformément continues en ce point, c'est-à-dire que nous admettrons qu'à un nombre positif* η *arbitrairement petit on peut faire correspondre un nombre* σ *tel que, pour* $|y| < \sigma$, $|z| < \sigma$, *ces dérivées* $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial z}$, $\frac{\partial \psi_i}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi_i}{\partial z}$ *soient en valeur absolue inférieures à* η, *et cela pour toutes les valeurs de* i. Nous pouvons supposer λ et μ réels et positifs.

Le système (24) admet-il des solutions asymptotiques à zéro pour i infini? La réponse est immédiate quand les fonctions φ_i, ψ_i sont identiquement nulles, et l'on est ainsi conduit à penser que *le système* (24) *admet des solutions asymptotiques à zéro quand l'un au moins des nombres* λ *et* μ *est inférieur à l'unité; et ces solutions dépendent d'autant de constantes arbitraires qu'il y a de nombres inférieurs à l'unité parmi les nombres* λ *et* μ.

Nous donnerons de ce théorème une démonstration analogue à celle que nous avons proposée pour la question correspondante concernant les équations différentielles (1), en transformant les équations de récurrence (24) en un système d'équations où les termes des suites inconnues figurent, en nombre fini ou infini, sous des signes d'addi-

(1) Voir *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXVIII, 1911, p. 473. La question posée ici a été étudiée dans le cas des équations de récurrence à coefficients constants par M. Lattès (*Annales de Toulouse*, 3e série, t. III, 1911; *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXIX, 1911, et t. XLII, 1914) qui a obtenu des résultats beaucoup plus complets que ceux donnés ci-dessus pour les équations à coefficients variables.

tion, système qui rappelle par conséquent les systèmes d'équations intégrales (du type Volterra).

Pour les former, partons d'une suite de relations de récurrence linéaires, mais non homogènes

$$y_{i+1} = \lambda y_i + \eta_i, \tag{25}$$

où λ et la suite des nombres η_i sont donnés. La solution en est

$$y_i = y_0 \lambda_i + \sum_{i_0}^{i} \lambda^{i-h-1} \eta_h, \tag{26}$$

où le symbole $\sum_{i_0}^{i}$ est une sommation relative à l'indice h, savoir :

1° Si $i_0 < i$,

$$\sum_{i_0}^{i} a_h = a_{i_0} + a_{i_0+1} + \ldots + a_{i-1};$$

2° Si $i_0 > i$,

$$\sum_{i_0}^{i} a_h = -(a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i_0-1}).$$

Dans l'un et l'autre cas, on a (*cf.* n° 6)

$$\sum_{i_0}^{i+1} a_h - \sum_{i_0}^{i} a_h = a_i, \qquad \sum_{\alpha}^{\beta} a_h + \sum_{\beta}^{\gamma} a_h + \sum_{\gamma}^{\alpha} a_h = 0.$$

Changer dans la formule (26) la valeur de i_0 équivaut à modifier la valeur de y_0 ; la solution générale du système (25) ne dépend bien que d'une constante arbitraire.

Nous pourrons prendre $i_0 = +\infty$ lorsque la série $\sum \frac{\eta_h}{\lambda^h}$ sera convergente.

D'après cela, nous pourrons transformer le système (24) dans le système d'équations

$$\begin{cases} y_i = y_0 \lambda^i + \sum_{i_0}^{i} \varphi_h(y_h, z_h) \lambda^{i-h-1}, \\ z_i = z_0 \mu^i + \sum_{i_0}^{i} \psi_h(y_h, z_h) \mu^{i-h-1}. \end{cases} \tag{27}$$

que nous appellerons *le système d'équations aux sommes* correspondant au système d'équations de récurrence (24), et où les termes des suites inconnues figurent dans les sommes intervenant dans les seconds membres. Le choix de i_0, i'_0 sera indiqué ultérieurement.

22. Sur certains systèmes linéaires d'équations aux sommes. Étudions d'abord, en vue de l'utiliser pour la démonstration de la convergence de certaines séries, un système linéaire à coefficients constants de la forme

$$(28)\qquad \begin{cases} y_{i+1} = \lambda y_i + \varepsilon (y_i + z_i) - (\lambda - 1)a, \\ z_{i+1} = \mu z_i + \varepsilon' (y_i + z_i) - (\mu - 1)b, \end{cases}$$

a et b étant positifs ; transformé par le même procédé, il nous donne

$$(29)\qquad \begin{cases} y_i = y_0 \lambda^i + \varepsilon \sum_{i_0}^{i} (y_h + z_h)\lambda^{i-h-1} - (\lambda - 1)a \sum_{i_0}^{i} \lambda^{i-h-1}, \\ z_i = z_0 \mu^i + \varepsilon' \sum_{i'_0}^{i} (y_h + z_h)\mu^{i-h-1} - (\mu - 1)b \sum_{i'_0}^{i} \mu^{i-h-1}, \end{cases}$$

équations qu'il est possible d'écrire plus simplement par un choix convenable des limites i_0, i'_0. *Nous prendrons* $i_0 = +\infty$ *si* $1 < \lambda$ *et* $i_0 = -\infty$ *si* $0 < \lambda < 1$, *et choisirons de la même façon* i'_0 *selon la grandeur de* μ (1).

Comme, en supposant $\lambda > 1$,

$$\sum_{+\infty}^{i} \lambda^{i-h-1} = -\left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \dots\right] = -\frac{1}{\lambda - 1},$$

et, que pour $\lambda < 1$,

$$\sum_{-\infty}^{i} \lambda^{i-h-1} = 1 + \lambda + \lambda^2 + \dots = \frac{1}{1-\lambda} = -\frac{1}{\lambda - 1}$$

(1) On remarquera que les suites y_i et z_i intervenant ici sont indéfinies dans les deux sens. D'autre part, les développements en série que comportent les équations (29) avec ce choix de i_0 et i'_0 sont pour le moment des développements formels ; on se préoccupera plus loin de la convergence.

avec le choix indiqué de i_0 et i'_0, on peut, dans tous les cas, donner aux relations (29) la forme

$$(30)\qquad \begin{cases} y_i = a + y_0\lambda^i + \varepsilon \sum_{i_0}^{i} (y_h + z_h)\lambda^{i-h-1}, \\ z_i = b + z_0\mu^i + \varepsilon' \sum_{i'_0}^{i} (y_h + z_h)\mu^{i-h-1}. \end{cases}$$

D'autre part, en écrivant les équations (28) ainsi :

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = (\lambda - 1)(y_i - a) + \varepsilon (y_i + z_i),$$
$$\Delta z_i = z_{i+1} - z_i = (\mu - 1)(z_i - b) + \varepsilon'(y_i + z_i),$$

on voit qu'elles admettent des solutions constantes

$$(y_{i+1} = y_i,\ z_{i+1} = z_i)$$

données par

$$\frac{y_i - a}{-\frac{\varepsilon}{\lambda - 1}} = \frac{z_i - b}{-\frac{\varepsilon'}{\mu - 1}} = y_i + z_i = \frac{a + b}{1 + \frac{\varepsilon}{\lambda - 1} + \frac{\varepsilon'}{\mu - 1}},$$

ou encore par

$$(31)\qquad \begin{cases} y_i = a - \dfrac{a + b}{1 + \frac{\varepsilon}{\lambda - 1} + \frac{\varepsilon'}{\mu - 1}} \dfrac{\varepsilon}{\lambda - 1}, \\ z_i = b - \dfrac{a + b}{1 + \frac{\varepsilon}{\lambda - 1} + \frac{\varepsilon'}{\mu - 1}} \dfrac{\varepsilon'}{\mu - 1}. \end{cases}$$

En développant les seconds membres de (31) en séries entières en ε et ε', la question de la convergence étant réservée, et en groupant dans les deux développements les termes dont le degré en ε et ε' ne surpasse pas un nombre p, on obtient des ensembles de termes $y_i^{(p)}$ et $z_i^{(p)}$ auxquels on peut parvenir d'une autre façon. Faisons dans les équations (30) $y_0 = z_0 = 0$ et appliquons aux équations

$$(32)\qquad \begin{cases} y_i = a + \varepsilon \sum_{i_0}^{i} (y_h + z_h)\lambda^{i-h-1}, \\ z_i = b + \varepsilon' \sum_{i'_0}^{i} (y_h + z_h)\mu^{i-h-1} \end{cases}$$

ainsi obtenues la méthode des approximations successives, la première approximation étant

$$y_i^0 = a, \qquad z_i^0 = b.$$

Les secondes (également indépendantes de l'indice i) seront

$$y_i^1 = a + \varepsilon \sum_{i_0}^{i} (y_h^0 + z_0^h)\lambda^{i-h+1} = a - \varepsilon \frac{(a+b)}{\lambda - 1}, \qquad z_i^1 = b - \varepsilon' \frac{(a+b)}{\mu - 1};$$

les troisièmes

$$y_i^2 = a + \varepsilon \sum_{i_0}^{i} (y_h^1 + z_h^1)\lambda^{i-h-1} = y_i^1 - \varepsilon \frac{(a+b)}{\lambda - 1}[y_i^1 - y_i^0 + z_i^1 - z_i^0],$$

$$z_i^2 = b + \varepsilon' \sum_{i_0}^{i} (y_h^1 + z_h^1)\mu^{i-h-1} = z_i^1 - \varepsilon' \frac{(a+b)}{\mu - 1}[y_i^1 - y_i^0 + z_i^2 - z_i^0],$$

et ainsi de suite; on vérifie facilement que les approximations d'ordre $p+1$ ainsi obtenues coïncident avec les termes y_i^p, z_i^p définis tout à l'heure.

Les séries que nous venons de considérer sont d'ailleurs convergentes dès que

$$\left|\frac{\varepsilon}{\lambda - 1}\right| + \left|\frac{\varepsilon'}{\mu - 1}\right| < 1. \tag{33}$$

Les nombres λ et μ sont réels et positifs, nous les supposons différents de l'unité; *nous prendrons ε et ε' égaux en valeur absolue et de signes tels que $\frac{\varepsilon}{\lambda - 1}$ et $\frac{\varepsilon'}{\mu - 1}$ soient tous deux négatifs;* il y aurait donc trois cas à considérer : λ et μ sont tous deux supérieurs à l'unité; λ et μ sont tous deux inférieurs à l'unité; λ et μ comprennent entre eux l'unité, nous supposons l'inégalité (33) vérifiée. Grâce à ces hypothèses, toutes les approximations successives sont formées de nombres positifs et croissants avec l'indice supérieur p.

En résumé, nous avons établi qu'il existait des suites

$$\ldots \quad y_{-2}, \quad y_{-1}, \quad y_0, \quad y_1, \quad y_2, \quad \ldots$$
$$\ldots \quad z_{-2}, \quad z_{-1}, \quad z_0, \quad z_1, \quad z_2, \quad \ldots$$

illimitées dans les deux sens, vérifiant les équations aux sommes (32). Les termes de chacune de ces suites sont égaux entre eux et sont donnés par les formules (31); ils peuvent aussi être obtenus par le procédé d'approximations successives dont nous venons de parler, et qui rappelle celui dont M. Picard a montré l'importance dans la théorie des équations différentielles.

La convergence de ces approximations entraîne la convergence des approximations dont nous allons parler. Nous étudierons le nouveau système

$$(34)\qquad \begin{cases} \overline{y_i} = \overline{a_i} + \varepsilon \sum' (\overline{y_h} + \overline{z_h}) \lambda^{i-h-1}, \\ \overline{z_i} = \overline{b_i} - \varepsilon' \sum' (\overline{y_h} + \overline{z_h}) \mu^{i-h-1}, \end{cases}$$

où λ et μ sont encore positifs et différents de l'unité, ε et ε' sont choisis comme plus haut, $\overline{a_i}$ et $\overline{b_i}$ satisfont aux inégalités

$$0 < \overline{a_i} < a, \qquad 0 < \overline{b_i} < b;$$

enfin i_0 *désigne* 0 *ou* $+\infty$ *selon que* $\lambda < 1$ *ou que* $\lambda > 1$, *la même détermination étant adoptée pour* i_0 *et* μ.

Les suites que fait intervenir le système (34) ne comprennent donc maintenant que des suites à indices positifs ou nuls :

$$\begin{array}{cccccc} \overline{y_0}, & \overline{y_1}, & \dots & \overline{y_i}, & \dots \\ \overline{z_0}, & \overline{z_1}, & \dots & \overline{z_i}, & \dots \end{array}$$

L'existence de solutions pour le système (34) s'établit alors, non plus directement, mais par le seul procédé d'approximations successives; les premières approximations sont

$$\overline{y_i^0} = \overline{a_i}, \qquad \overline{z_i^0} = \overline{b_i}$$

et d'une façon générale les approximations de rang $p+1$, $\overline{y_i^p}$, $\overline{z_i^p}$ se calculent en substituant dans les seconds membres de (34) $\overline{y_h}$ et $\overline{z_h}$ par $\overline{y_h^{p-1}}$ et $\overline{z_h^{p-1}}$. Ces approximations successives $\overline{y_i^p}$ et $\overline{z_i^p}$ sont encore

positives, croissent avec l'indice supérieur p ; leur convergence résulte de ce qu'elles restent, ainsi que leurs différences premières $\overline{\gamma_i^p} - \overline{\gamma_i^{p-1}}$, $\overline{z_i^p} - \overline{z_i^{p-1}}$, inférieures aux éléments correspondants γ_i^p, z_i^p, $\gamma_i^p - \gamma_i^{p-1}$, $z_i^p - z_i^{p-1}$ construits antérieurement pour le système (32). Les limites $\overline{\gamma_i}$, $\overline{z_i}$ vers lesquelles elles tendent, quand p tend vers $+\infty$, satisfont au système (34) et vérifient les inégalités

$$(35)\qquad \begin{cases} o < \overline{\gamma_i} < a + \dfrac{a+b}{|\lambda - 1|} \dfrac{|\varepsilon|}{1 - |\varepsilon| \left\{ \dfrac{1}{|\lambda - 1|} + \dfrac{1}{|\mu - 1|} \right\}}, \\ o < \overline{z_i} < b + \dfrac{a+b}{|\mu - 1|} \dfrac{|\varepsilon|}{1 - |\varepsilon| \left\{ \dfrac{1}{|\lambda - 1|} + \dfrac{1}{|\mu - 1|} \right\}}. \end{cases}$$

Rappelons, en passant, que $|\varepsilon'| = |\varepsilon|$. Voilà faite l'étude du système qui va nous servir de système de comparaison.

23. Solutions asymptotiques a zéro de certains systèmes d'équations de recurrence non lineaires. — Nous pouvons reprendre maintenant l'étude du système

$$(24)\qquad \begin{cases} y_{i+1} = \lambda y_i + \varphi_i(y_i, z_i), \\ z_{i+1} = \mu z_i + \psi_i(y_i, z_i), \end{cases}$$

déjà signalé au n° 21, où nous avons indiqué quelles conditions nous supposons réalisées par les fonctions $\varphi_i(y, z)$, $\psi_i(y, z)$ et leurs dérivées premières; nous avons dit également qu'on pouvait transformer ce système dans un système d'équations aux sommes

$$(27)\qquad \begin{cases} y_i = y_0 \lambda^i + \sum_{i_0}^{i} \varphi_h(y_h, z_h) \lambda^{i-h-1}, \\ z_i = z_0 \mu^i + \sum_{i_0}^{i} \psi_h(y_h, z_h) \mu^{i-h-1}, \end{cases}$$

dont nous allons rechercher les solutions asymptotiques à zéro (pour i tendant vers $+\infty$).

Supposons $\lambda < \mu$, nous avons trois cas à distinguer :

1° $\quad 0 < \lambda < 1 < \mu,$

2° $\quad 0 < \lambda < \mu < 1,$

3° $\quad 0 < 1 < \lambda < \mu;$

nous écarterons tout de suite le dernier $y_0\lambda^i$ et $z_0\mu^i$, ne pouvant tendre vers zéro.

Plaçons-nous dans l'hypothèse 1°; nous prendrons dans les équations (27) $z_0 = 0$, $i_0 = 0$, $i_0' = +\infty$; le système à étudier est donc

$$(36)\qquad \begin{cases} y_i = y_0\lambda^i + \sum_{h=0}^{h=i-1} \varphi_h(y_h, z_h)\lambda^{i-h-1}, \\ z_i = \sum_{h=+\infty}^{h=i-1} \psi_h(y_h, z_h)\mu^{i-h-1}. \end{cases}$$

Nous prendrons le nombre η du n° 21 assez petit pour que

$$(37)\qquad \eta\left\{\frac{1}{1-\lambda} + \frac{1}{\mu-1}\right\} < 1;$$

η étant choisi, le nombre σ, considéré au même endroit, peut être déterminé; cela fait, nous prendrons $|y_0|$ assez petit pour qu'on ait à la fois

$$|y_0|\left[1 + \frac{\eta}{1-\lambda}\,\frac{1}{1-\eta\left\{\frac{1}{1-\lambda} + \frac{1}{\mu-1}\right\}}\right] < \sigma,$$

$$|y_0|\,\frac{\eta}{\mu-1}\,\frac{1}{1-\eta\left\{\frac{1}{1-\lambda} + \frac{1}{\mu-1}\right\}} < \sigma.$$

Choisissons comme premières approximations du système (36)

$$y_0' = y_0\lambda^i, \qquad z_0' = 0.$$

et construisons de proche en proche les approximations de rang $p+1$, c'est-à-dire y_i^p, z_i^p par substitution de celles de rang p, y_h^{p-1} et z_h^{p-1} à y_h et à z_h dans les seconds membres des équations (36). Pour établir que ces approximations successives ont un sens et qu'elles convergent

uniformément (par rapport à i) vers des limites y_i, z_i, il suffit de les comparer aux approximations de même rang du système

$$(38)\qquad \begin{cases} \overline{y_i} = |y_0|\lambda^i + \eta_i \sum_{0}^{i} (\overline{y_h} + \overline{z_h})\lambda^{i-h-1}, \\ \overline{z_i} = -\eta_i \sum_{+\infty}^{i} (\overline{y_h} - \overline{z_h})\mu'^{-h}, \end{cases}$$

qui appartient au type (34) étudié au n° 22; on a ici

$$\overline{a_i} = |y_0|\lambda^i, \qquad \overline{b_i} = 0, \qquad \varepsilon = \eta_i, \qquad \varepsilon' = -\eta_i.$$

De cette comparaison, il résulte que y_i^ν, z_i^ν tendent uniformément vers leurs limites y_i, z_i; $\varphi_i(y_h^\nu, z_h^\nu)$ $\psi_i(y_h^\nu, z_h^\nu)$ tendent uniformément vers $\varphi_i(y_h, z_h)$, $\psi_i(y_h, z_h)$; par conséquent les deux suites y_i, z_i ainsi trouvées vérifient bien les équations aux sommes (36) et aussi les équations de récurrence (24).

Un seul point reste à établir, c'est que y_i, z_i tendent vers zéro en même temps que $\frac{1}{i}$. Il suffira de montrer qu'il en est ainsi pour les solutions $\overline{y_i}$, $\overline{z_i}$ du système (38) qui dominent y_i et z_i.

Or, ce système d'équations aux sommes correspond au système d'équations de récurrence

$$(39)\qquad \begin{cases} \overline{y}_{i+1} = \lambda \overline{y_i} + \eta(\overline{y_i} + \overline{z_i}), \\ \overline{z}_{i+1} = \mu \overline{z_i} + \eta(\overline{y_i} + \overline{z_i}), \end{cases}$$

à coefficients constants. L'équation caractéristique correspondante (*voir* n° 20)

$$(40)\qquad \begin{vmatrix} \lambda + \eta - \rho & \eta_i \\ -\eta_i & \mu - \eta - \rho \end{vmatrix} = 0$$

a ses racines λ', μ' infiniment voisines de λ et de μ lorsque η est infiniment petit; on peut admettre que η a été pris assez voisin de zéro pour que

$$\lambda' < 1 < \mu'.$$

La solution générale de (39) est une combinaison linéaire des

expressions λ'^i, μ'^i; la première tend vers zéro, la seconde devient infinie quand i croît indéfiniment. La solution qui domine y_i, z_i reste finie, et ne peut contenir que des termes en λ'^i; donc y_i et z_i tendent bien vers zéro. Elle dépend du reste d'une constante arbitraire y_0. Ainsi se trouve établie, pour le cas $0 < \lambda < 1 < \mu$, la proposition énoncée au n° 21 (p. 176).

Le lecteur n'aura pas de difficulté à établir, par une marche analogue, l'exactitude de cette proposition dans le cas où λ et μ sont tous deux inférieurs à l'unité.

Il est à peine besoin d'ajouter qu'une proposition de même nature s'applique quand on a un système S d'équations de récurrence à n suites inconnues du type (20) (p. 174) vérifiées lorsque tous les termes des suites inconnues sont nuls, les équations aux variations V correspondantes étant à coefficients constants. Si l'on admet que l'équation caractéristique correspondant à ces équations aux variations a ses racines distinctes, p étant de modules inférieurs à l'unité, les $n-p$ autres de modules supérieurs à l'unité, le système S admet une famille de solutions asymptotiques à zéro dépendant de p constantes arbitraires. Les cas laissés de côté (racines multiples, racines de module égal à l'unité) pourraient être étudiés par une méthode analogue à celle qui réussit dans les cas correspondants concernant les équations différentielles (¹).

Le cas où les équations aux variations V seraient à coefficients variables paraît aussi abordable par des méthodes de même nature (²); si le système V est régulier, les nombres caractéristiques de ses solutions détermineraient alors, par leurs signes, le nombre minimum de solutions distinctes de S asymptotiques à zéro.

(¹) Voir *Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. XXVIII, 1911, p. 489 à 495.
(²) *Ibid.*, p. 502 et suiv.

SUR

LES FONCTIONS AUTOMORPHES

D'UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES

PAR M. GEORGES GIRAUD.

Si l'on entend par fonction automorphe de n variables une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ telle que l'on ait

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(X_1, X_2, \ldots, X_n,$$

pourvu que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ résultent de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par certaines transformations birationnelles, ou même analytiques biunivoques, formant nécessairement un groupe, on a une catégorie très vaste de fonctions. Les plus anciennement connues furent certainement les fonctions périodiques, et en particulier les fonctions circulaires. Ensuite vinrent les fonctions doublement périodiques d'une variable, ou fonctions elliptiques, puis les fonctions abéliennes de n variables, enfin les célèbres fonctions d'une variable auxquelles le nom de Poincaré restera attaché, et les fonctions de plusieurs variables, dont les premières furent découvertes par M. Picard, et qui généralisent les fonctions de Poincaré.

Dans ce vaste champ d'études, nous nous attacherons ici à une catégorie très particulière de fonctions, ne comprenant notamment ni les fonctions elliptiques et abéliennes, ni les fonctions de Poincaré dont le groupe ne conserve aucun cercle. Nous énoncerons certaines hypothèses (H) auxquelles doit satisfaire le groupe des transformations qui font passer de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Ces hypothèses (H) sont fort simples, bien qu'elles ne soient pas satisfaites dans les cas qui viennent d'être indiqués. Et surtout, les résultats

obtenus moyennant ces hypothèses ont eux-mêmes un caractère de simplicité particulière: on verra que, pourvu qu'un groupe satisfaisant à ces hypothèses soit discontinu, il admet des fonctions automorphes : tandis qu'on sait parfaitement trouver, par exemple, des systèmes de quatre périodes pour deux variables, donnant naissance à des groupes discontinus, et auxquels ne correspond aucune fonction abélienne. A cet égard, les fonctions considérées ici apparaissent donc comme plus simples que les fonctions abéliennes.

Parmi les fonctions auxquelles s'appliquent nos hypothèses se trouvent les fonctions de Poincaré dont le groupe conserve un cercle, et la plupart des fonctions de plusieurs variables que les mathématiciens ont introduites à la suite de M. Picard. Nous énumérerons plusieurs de ces fonctions après la théorie générale qui formera la première Partie de ce travail.

Dans cette théorie générale, nous nous attacherons surtout à prouver l'existence des fonctions automorphes, à indiquer les conditions locales que l'on peut leur imposer et à donner une méthode générale de formation du *polyèdre fondamental* (méthode de rayonnement).

Dans la deuxième Partie, l'objet principal est de prouver que les catégories de fonctions énumérées satisfont aux hypothèses (H).

On peut démontrer, pour plusieurs de ces catégories de fonctions, des théorèmes d'après lesquels $n-1$ fonctions automorphes de n variables sont liées par une relation algébrique [1] : mais les démonstrations actuelles de ces propositions obligent à considérer séparément les différentes catégories de fonctions; elles ne rentreraient donc pas bien dans le cadre du présent travail et sont réservées pour une autre occasion.

Beaucoup des résultats qui suivent sont obtenus depuis longtemps. Une partie de la théorie générale a déjà été trouvée par M. Fubini [2], mais avec des hypothèses différentes : pourtant, il ne semble pas qu'on ait cité jusqu'à présent de catégories de fonctions, ou plutôt de groupes, satisfaisant aux hypothèses (H) et ne satisfaisant pas à

[1] Georges Giraud. *Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 164, 1917, p. 386 et 487; t. 166, 1918, p. 24; t. 169, 1919, p. 132.

[2] Fubini. *Annali di matematica*, 3e série, t. XI, 1905, p. 169; t. XII, 1906, p. 345; t. XIV, 1908, p. 33.

celles de M. Fubini. On ne sait donc pas si les deux ensembles d'hypothèses sont ou non équivalents.

D'ailleurs, toute cette théorie générale a été édifiée par des généralisations et des modifications successives des raisonnements de Poincaré, que M. Picard a été le premier à adapter à des fonctions de deux variables. Le cas de plusieurs variables diffère, en effet, de celui d'une variable, notamment pour la formation des fonctions Θ et pour l'emploi de celles-ci à la formation des fonctions automorphes; et les particularités que M. Picard a rencontrées pour ses fonctions de deux variables se retrouvent sans changement dans le cas général. La méthode de formation du polyèdre fondamental qu'on trouvera plus loin a déjà été présentée, sous une forme différente à cause des hypothèses, par M. Fubini; sa première idée paraît remonter(1) à Dirichlet: MM. Fricke et Klein s'en sont servis pour les groupes de Poincaré.

Quant aux types de groupes énumérés dans la seconde Partie, la plupart sont dus à Poincaré, à M. Picard et à M. Fubini. J'indique pour tous ces types l'*invariant différentiel* qui permet de leur appliquer la théorie de M. Fubini, et j'en déduis l'existence d'*intégrales invariantes* de tous les ordres de multiplicité, de 1 à $2n$, n étant le nombre des variables.

J'écris dans ce Mémoire les intégrales multiples de cette manière :

$$\int_R^{(n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, d(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

R désignant le domaine d'intégration, $d(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ l'élément de ce domaine, et n, qu'on remplace par des accents ou des chiffres romains quand il est donné numériquement, l'ordre de multiplicité de l'intégrale. Cette notation, qui permet d'écrire l'aire d'une surface S de l'espace à trois dimensions

$$\int_S^{(2)} \sqrt{d(y, z)^2 + d(z, x)^2 + d(x, y)^2},$$

sans introduire de paramètres particuliers, est commode pour la démonstration de l'existence des intégrales invariantes.

---

(1) Cf. *Bull. des Sc. math.*, t. XXXVIII, 1914, 1re Partie, p. 152.

Les matières traitées dans ce qui suit sont développées plus complètement dans un Ouvrage qui paraîtra prochainement dans la collection de M. Borel sous le titre : *Leçons sur les fonctions automorphes*. Il m'arrivera plusieurs fois de renvoyer à cet Ouvrage, pour des démonstrations omises ou abrégées ici.

PREMIÈRE PARTIE.

Théorie générale.

1. Nous désignerons par (Γ) (entre parenthèses) un groupe dont la substitution générale dépend d'une manière *continue* (¹) de certains paramètres, et est birationnelle ou même analytique biunivoque. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les variables, la substitution générale est définie par des formules telles que

$$X_k = f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

où les X sont les variables transformées et les a des paramètres, qui peuvent d'ailleurs être assujettis à des conditions d'égalité ou d'inégalité. On peut avoir d'autres systèmes de formules concourant, avec le précédent, à former (Γ).

Pour notre théorie, (Γ) sera supposé satisfaire à certaines hypothèses, nommées hypothèses (H). Ces hypothèses font intervenir un *domaine ouvert* D et un *invariant* I. On suppose :

1° Que D est tout entier à distance limitée (c'est-à-dire intérieur à une hypersphère de l'espace à $2n$ dimensions où les coordonnées sont les parties réelles et imaginaires de $x_1, x_2, \ldots, x_n$), ou peut y être ramené par une transformation analytique biunivoque; D est, en outre, linéairement connexe;

2° Que D est changé en lui-même par toute transformation de (Γ);

(¹) La continuité n'est pas indispensable; (Γ) est le groupe dont nous extrairons des groupes discontinus.

3° Qu'à tout ensemble fermé R intérieur à D on peut faire correspondre deux nombres positifs M et m tels que le rapport des valeurs absolues du déterminant fonctionnel d'une substitution quelconque de (Γ) en deux points quelconques de R reste compris entre M et m; si D n'est pas à distance limitée, cette hypothèse doit être vérifiée par le groupe transformé de (Γ) par la substitution qui ramène D à distance limitée; il faut, pour que cette hypothèse ait un sens, que les f_k soient holomorphes dans D;

4° Que I est une fonction réelle continue dans D des parties réelles et imaginaires de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et de n autres variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$; plus brièvement, I est une fonction de deux points, I(A, B); cette fonction est symétrique :

$$I(A, B) = I(B, A).$$

En outre, I ne change pas si l'on fait subir à A et à B une même transformation de (Γ) :

$$I(A, B) = I(A', B'),$$

pourvu que A' et B' soient les transformés de A et B par une substitution de (Γ);

5° Qu'il existe deux nombres réels λ' et λ''

$$\lambda' < \lambda''$$

tels que, pour

$$\lambda' < \lambda < \lambda'',$$

la multiplicité

$$I(A, M) = \lambda, \tag{1}$$

où A est fixe dans D et M variable, partage D en deux régions linéairement connexes, dont l'une, contenant A, n'atteint pas la frontière de D; λ'' peut être remplacé par l'infini;

6° Que si λ tend vers λ', les points de (1) tendent uniformément vers A;

7° Que si M tend vers un point de la frontière de D, I(A, M) tend vers λ'', uniformément par rapport à A et à M.

Telles sont les hypothèses (H); dans la suite, nous les désignerons

par (H, 1), (H, 2), etc., selon leur rang dans cette énumération (¹).

D se nommera le *domaine principal*, I(A, B) *l'invariant fondamental*; (1) sera une *multiplicité cyclique*, de *paramètre* λ et de *centre* A: la région de D qui est située du même côté de (1) que le centre est l'*intérieur* de la multiplicité, l'autre région est son *extérieur*.

2. Soit Γ (sans parenthèses) un *groupe* d'une infinité énumérable $S_1, S_2, \ldots, S_p, \ldots$ de substitutions de (Γ). Appliquons toutes ces substitutions à un même point A, et comptons chaque transformé pour autant de points qu'il y a de substitutions le déduisant de A. *On dit que* Γ *est discontinu en* A si A n'est pas un point d'accumulation de ses transformés; en particulier, A n'est point double que d'un nombre fini de substitutions de Γ.

3. Théorème. — 1° *Si* Γ *est discontinu en un point du domaine principal,* Γ *est discontinu en tout point de ce domaine;*

2° *Les transformés par* Γ *d'aucun point de* D *n'ont de point d'accumulation dans ce domaine.*

Soit A le point de D en lequel Γ est discontinu. Nous allons tout d'abord trouver un nombre λ tel que les multiplicités cycliques qui ont pour centres A et ses transformés par Γ et pour paramètre λ soient toutes entièrement extérieures les unes aux autres, exception faite pour celles qui ont le même centre et qui sont alors confondues.

A n'est pas point d'accumulation de ses transformés; on peut donc, d'après (H, 6), trouver un nombre $\lambda_1 > \lambda'$ suffisamment voisin de λ' pour que la multiplicité M_1 de centre A et de paramètre λ_1 ait à son *extérieur* tous les transformés de A différents de A.

Soit λ_2 un nombre tel que $\lambda' < \lambda_2 < \lambda_1$. Considérons tous les points intérieurs aux multiplicités M_2 de paramètre λ_2 et de centre non intérieur à M_1, ou situés sur une de ces multiplicités; adjoignons-leur les points de la frontière de D. Nous avons ainsi un *ensemble parfait* R_1.

(¹) Dans l'Ouvrage *Leçons sur les fonctions automorphes*, les hypothèses (H, 4 à 7) ont leurs numéros augmentés de deux unités; les hypothèses (H, 4 et 5) de cet Ouvrage sont relatives à une intégrale $2n$-uple qui n'est pas indispensable pour notre objet, ainsi qu'on l'explique dans cet Ouvrage.

Car, soit B un point de cet ensemble : s'il est intérieur à une multiplicité M_2 ou situé sur son contour, B est un point d'accumulation des points de R_1; si B est sur la frontière de D, tous les points de cette frontière faisant partie de R_1, B fait encore partie du dérivé de R_1; d'ailleurs les points de D assez voisins d'un point de la frontière font aussi tous partie de R_1. Soit maintenant C un point du dérivé de R_1; si C est sur la frontière de D, il fait partie de R_1; si C n'est pas sur la frontière de D, soient B_1, B_2, ..., B_m, ... des points de R_1 ayant C pour unique point d'accumulation; les centres E_1, E_2, ..., E_m, ... des multiplicités M_2 correspondantes n'ont aucun point d'accumulation sur la frontière de D, d'après (H, 7); alors si E est un de leurs points d'accumulation, E n'est pas intérieur à M_1, et C se trouve, d'après la continuité de I, à l'intérieur ou sur le contour de la multiplicité M_2 de centre E; donc C fait partie de R_1. R_1 est identique à son dérivé, donc R_1 est parfait.

Or A ne fait pas partie de R_1; car, d'après (H, 5), une multiplicité dont le centre n'est pas intérieur à M_1 n'a A à son intérieur ou sur son contour que si son paramètre est au moins $\lambda_1 > \lambda_2$.

Donc, d'après (H, 6), il existe un nombre $\lambda_3 > \lambda'$ tel que la multiplicité M_3 de centre A et de paramètre λ_3 ait à son extérieur tous les points de R_1.

Soit λ le plus petit des nombres λ_2 et λ_3; les multiplicités cycliques M de paramètre λ et de centres A et ses transformés sont toutes extérieures les unes aux autres, exception faite pour celles dont les centres sont confondus.

Soit $q \geq 1$ le nombre fini des substitutions de Γ qui ont A pour point double; tout transformé de A est aussi point double de q substitutions de Γ.

Supposons D ramené à distance finie. Soit R un *ensemble fermé* intérieur à D. Les multiplicités M' de paramètre λ et dont le centre appartient à R forment, par la réunion de leurs intérieurs et de leurs contours, un *ensemble fermé* R': la démonstration est analogue à celle qui, plus haut, concerne R_1. I(B, C) est continu, pourvu que B et C appartiennent à R'; la continuité est donc alors uniforme. Or les multiplicités M dont le centre appartient à R sont des multiplicités M'; donc la distance (au sens ordinaire) d'un point d'une de ces multi-

plicités à son centre reste supérieure à un certain minimum $\rho > 0$, sinon, à cause de la continuité uniforme, I serait aussi voisin de λ' que veut, donc inférieur à λ. Donc, la distance des centres de deux de ces multiplicités est au moins 2ρ; donc *les transformés de* A *n'ont pas de point d'accumulation dans* R, *ni, par suite, dans* D.

Pour achever de démontrer notre théorème, il suffit de faire voir que Γ est discontinu en un point quelconque B de D. Admettons qu'il n'en soit pas ainsi : nous aboutirons à une contradiction. Soient en effet $B_1, B_2, \ldots, B_m, \ldots$ des transformés de B ayant B pour unique point d'accumulation. Soit $\lambda_1 = I(A, B)$; les points des multiplicités de paramètre λ_1 et de centres $B_1, B_2, \ldots, B_m, \ldots$ n'ont comme point d'accumulation aucun point de la frontière de D, d'après (H, 7); or, chacune de ces multiplicités passe par un transformé de A, d'après (H, 4); donc ces transformés de A ont un point d'accumulation intérieur à D : c'est la contradiction annoncée.

Le théorème est démontré.

4. Théorème. — *Soit* $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *une fonction rationnelle ou analytique uniforme qui soit holomorphe dans* D *et sur sa frontière. Soit* $(x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{n,p})$ *le transformé de* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *par la substitution* S_p *du groupe* Γ *discontinu dans* D. *La série*

$$\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{p=1}^{\infty} H(x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{n,p}) \left[\frac{\partial(x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{n,p})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right]^k,$$

où k *est un entier au moins égal à* 2, *est absolument et uniformément convergente dans tout ensemble fermé intérieur à* D (*supposé ramené à distance finie*).

Comme, sous les hypothèses faites, $|H|$ est dans D inférieur à un nombre fixe, nous sommes ramenés à prouver la convergence uniforme de la série

$$(2) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} \left|\frac{\partial(x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{n,p})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right|^2.$$

Soit A un point de D. Soit λ le paramètre des multiplicités, introduites dans la démonstration précédente, qui ont pour centres A et ses

transformés, et qui sont toutes extérieures les unes aux autres. Soit M_p l'intérieur de celle d'entre elles qui correspond à S_p. La série d'intégrales $2n$-uples

$$\sum_{p=1}^{\infty} \int_{M_p}^{(2n)} d(x'_1, x''_1, x'_2, \ldots, x''_n) \qquad (x_n = x'_n + i x''_n)$$

est convergente, car la somme d'un nombre quelconque de termes ne dépasse pas, q étant le nombre des substitutions de point double A,

$$q \int_{D}^{(2n)} d(x'_1, x''_1, x'_2, \ldots, x''_n).$$

[on désigne ici par $d(x'_1, x''_1, \ldots, x''_n)$ l'élément de domaine d'intégration à $2n$ dimensions]. Or, en supposant que S_1 soit la substitution identique, la même série peut s'écrire

$$\sum_{p=1}^{\infty} \int_{M_1}^{(2n)} \frac{\partial(x'_{1,p}, x''_{1,p}, \ldots, x''_{n,p})}{\partial(x'_1, x''_1, \ldots, x''_n)} d(x'_1, x''_1, \ldots, x''_n).$$

Mais on connaît l'identité

$$\frac{\partial(x'_{1,p}, x''_{1,p}, \ldots, x''_{n,p})}{\partial(x'_1, x''_2, \ldots, x''_n)} = \left| \frac{\partial(x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{n,p})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right|^2.$$

Si M et m sont les nombres de l'hypothèse (H, 3) qui correspondent à M_1, on en déduit que la série

$$\sum_{p=1}^{\infty} m \left| \frac{\partial(x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{n,p})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right|^2 \int_{M_1}^{(2n)} d(x'_1, x''_1, \ldots, x''_n),$$

où le déterminant fonctionnel est pris en A, a ses termes inférieurs à ceux de la précédente ; par suite, la série (2) converge en A.

La convergence uniforme dans tout ensemble fermé intérieur à D résulte alors immédiatement de (H, 3).

Le théorème est démontré.

5. Pour conclure de ce théorème l'existence de fonctions automorphes, il suffit de prouver que la fonction Θ n'est pas nécessairement

identiquement nulle. En effet, la fonction Θ, qui est évidemment holomorphe dans D, satisfait à la relation fonctionnelle

$$\Theta(x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{n,p}) = \Theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)\left[\frac{\partial(x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{n',p})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right]^{-k}.$$

Si l'on peut trouver deux fonctions Θ non identiquement nulles correspondant au même nombre k, leur quotient sera une fonction automorphe.

Cette possibilité sera démontrée un peu plus loin; ce sera un cas particulier d'une proposition plus générale. Il est auparavant nécessaire que nous revenions au groupe (Γ).

6. Supposons qu'une substitution S de (Γ) ait un point double A intérieur à D; soit

$$S = (x_1, x_2, \ldots, x_n; X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Formons l'équation en s :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} - s & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} - s & \frac{\partial X_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} & \frac{\partial X_n}{\partial x_1} & \frac{\partial X_n}{\partial x_1} - s \end{vmatrix} = 0,$$

où les dérivées sont prises en A. Je dis que *les valeurs absolues de toutes ses racines sont égales à* 1.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait supposer, en remplaçant au besoin S par son inverse, que l'une des racines est supérieure à *un* en valeur absolue. Si alors s est, par exemple, celle des racines dont la valeur absolue est la plus grande, et si l'on s'arrange pour que A ait pour coordonnées $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, Poincaré a démontré (1) qu'il existe n fonctions d'une variable y, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y), \ldots, \varphi_n(y)$, méromorphes à distance finie, s'annulant avec y, et telles que

$$\varphi_k(sy) = X_k[\varphi_1(y), \varphi_2(y), \ldots, \varphi_n(y)] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

(1) POINCARÉ, *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VI, 1890, p. 313.

Si nous considérons les points de coordonnées

$$x_k = \varphi_k(y),$$

leurs transformés par S^p s'obtiennent en changeant y en $s^p y$. Si maintenant p tend vers $-\infty$, on voit que ces points tendent vers A. La multiplicité cyclique de centre A qui passe par l'un d'eux a donc, d'après (H, 4), des points aussi voisins de A que l'on veut; elle a donc, d'après (H, 6), λ' pour paramètre; mais cela contredit alors l'hypothèse (H, 6), d'après laquelle une multiplicité cyclique de paramètre λ' se réduit à son centre. Cette contradiction prouve notre proposition.

7. Si S fait partie d'un groupe discontinu Γ, comme il y a seulement un nombre fini de substitutions de Γ qui aient A pour point double, les arguments de toutes les racines s de l'équation précédente sont commensurables avec π, et, même si quelques-unes de ces racines sont confondues, les termes du premier degré de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n'en sont pas moins susceptibles, par une transformation homographique de l'espace, de prendre la forme

$$X_k = s_k x_k + \ldots \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

les termes non écrits étant du second degré au moins. En effet, une certaine puissance de S se réduit à la substitution identique.

8. Les substitutions de S qui ont A comme point double forment un groupe G d'un nombre fini de substitutions. Il est donc facile de former des fonctions invariantes par G. Parmi elles, considérons celles qui sont holomorphes en A, et développons-les en série de puissances de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, A étant à l'origine. Dans ce développement, considérons les termes jusqu'au degré r quelconque choisi à l'avance. Il est presque immédiat qu'ils ne sont pas arbitraires : en effet, l'ensemble des termes de plus bas degré non nul, par exemple, doit se reproduire par les substitutions de G réduites à leurs termes de plus bas degré. Donc, ces termes dépendent linéairement d'un certain nombre de paramètres inférieur au nombre

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}{1.2\ldots r}$$

de ces termes. Nous dirons que ce sont les paramètres correspondant au point A et à l'entier r.

Si A n'est point double que de la substitution identique de Γ, on peut maintenir la même définition, mais alors le nombre des paramètres est

$$\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+r)}{1.2\dots r},$$

c'est-à-dire que tous les coefficients sont arbitraires.

Comme les fonctions automorphes de Γ, supposées existantes, sont invariantes par G, on peut parler de leurs paramètres en A, pourvu qu'elles soient holomorphes en ce point.

Nous arrivons maintenant au théorème qui nous prouve, en particulier, l'existence de fonctions automorphes annoncée au n° 5.

9. Théorème. — *Considérons dans le domaine principal* D *un nombre quelconque* m *de points* $A_1, A_2, \dots, A_m$ *distincts, tels que deux points différents ne soient pas transformés l'un de l'autre par une substitution du groupe discontinu* Γ. *Soit* r *un entier donné. Il existe des fonctions automorphes de* Γ *dont les paramètres correspondant aux* m *points et à l'entier* r *ont tous des valeurs données à l'avance.*

Cette proposition est utile quand on aborde l'étude des relations algébriques qui existent dans certains cas entre les fonctions automorphes de Γ, et l'étude des équations différentielles ou aux dérivées partielles que ces fonctions permettent d'intégrer.

Pour abréger, nous nous bornerons ici au cas où aucun des points $A_1, A_2, \dots, A_m$ n'est point double d'une substitution non identique de Γ; la démonstration générale se trouve dans l'Ouvrage cité *Leçons sur les fonctions automorphes*.

Observons qu'il suffit de démontrer l'existence de fonctions automorphes pour lesquelles ces paramètres, c'est-à-dire ici les valeurs des fonctions et des dérivées partielles jusqu'à l'ordre r aux m points, aient des valeurs aussi voisines que l'on veut de celles qui ont été données à l'avance. Car alors on pourra former des fonctions automorphes en nombre égal à celui des conditions imposées, et pour lesquelles le déterminant correspondant ne soit pas nul : en combinant

linéairement ces dernières fonctions, on pourra remplir exactement les conditions imposées.

Nous pouvons alors nous borner à prouver qu'il existe deux séries Θ, correspondant au même nombre k, prenant, ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre r, des valeurs aux m points aussi voisines que l'on veut de valeurs données : leur quotient sera la fonction automorphe cherchée.

Remarquons que, les séries Θ étant des séries uniformément convergentes de fonctions holomorphes, leurs dérivées partielles s'obtiennent en dérivant terme à terme.

Nous choisirons d'abord (¹) la fonction H qui intervient dans la série Θ; ensuite nous déterminerons k.

Il y a seulement un nombre fini de transformations de Γ dont le déterminant fonctionnel en l'un des points $A_1, A_2, \ldots, A_m$ soit au moins égal à μ en valeur absolue (D étant bien entendu ramené à distance finie). Mettant à part la substitution identique, nous assujettirons tout d'abord H et ses dérivées jusqu'à l'ordre r à s'annuler aux points en lesquels les autres substitutions de cette sorte changent $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

De plus, H et ses dérivées jusqu'à l'ordre r doivent prendre en A_1, $A_2, \ldots, A_m$ exactement les valeurs données.

On peut satisfaire à toutes ces conditions en prenant pour H, par exemple, un polynome. H est alors holomorphe dans D, comme il le faut.

H étant ainsi choisi, on va voir que, si k est assez grand, le résultat cherché est atteint.

En effet, $\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se compose premièrement du terme $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, correspondant à la substitution identique, et deuxièmement d'une série infinie d'autres termes. Il faut prouver que, k étant assez grand, cette deuxième partie et ses dérivées jusqu'à l'ordre r sont aussi petites que l'on veut en $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

(¹) Ce raisonnement n'est qu'une généralisation de celui que M. Picard a employé pour ses fonctions de deux variables (*Acta mathematica*, t. I, 1882, p. 314). M. Picard a d'ailleurs lui-même indiqué des généralisations de son premier résultat (*Acta math.*, t. V, 1884, p. 168 et suiv.).

Soit

$$\mathrm{H}(x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{n,p}) \left[\frac{\partial(x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{n,p})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right]^k$$

un terme quelconque de cette deuxième partie. Une dérivée quelconque d'ordre q de ce terme est le produit de

$$\left[\frac{\partial(x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{n,p})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right]^{k-q}$$

par une fonction qui, par rapport à k, est un polynome d'ordre q (si l'on ne dérive pas, $q = 0$).

Si $q \leq r$, et si le terme est l'un de ceux dont le déterminant fonctionnel en l'un des points $A_1, A_2, \ldots, A_m$ est au moins égal à *un* en valeur absolue, cette dérivée est nulle quel que soit k, d'après le choix de H.

Traçons des hypersphères de centres $A_1, A_2, \ldots, A_m$ et de rayons assez petits pour être tout entières intérieures à D. Soit g le maximum du rapport des valeurs absolues du déterminant fonctionnel pour l'ensemble fermé formé par ces hypersphères [hypothèse H, 3]. Parmi les termes restants, il y en a seulement un nombre fini pour lesquels la valeur absolue du déterminant fonctionnel en l'un des points $A_1, A_2, \ldots, A_m$ atteint $1 : g$. Ces termes ont, dans Θ et dans ses dérivées, une part aussi petite que l'on veut si k est assez grand.

Pour les autres termes, on a, dans toutes les hypersphères,

$$\left|\frac{\partial(x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{n,p})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right| \leq \mu_p < 1 ;$$

μ_p est, par exemple, le produit par g du déterminant fonctionnel en A_1.

Le terme de Θ est donc, au plus, égal en valeur absolue à $\mathrm{M}\mu_p^k$, dans toutes ces hypersphères, M étant le maximum de $|\mathrm{H}|$ dans D. Pour les dérivées de ce terme jusqu'à l'ordre r, il faut prendre en $A_1, A_2, \ldots, A_m$ $\mathrm{M}'\mu_p^k$, M' dépendant de M, de r, et des rayons des hypersphères. En effet, une de ces dérivées est

$$\frac{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}{(2\pi i)^n} \int^{(n)} \frac{\mathrm{J}(z_1, z_2, \ldots, z_n)\, d(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{(z_1 - x_1)^{\alpha+1}(z_2 - x_2)^{\beta+1}\ldots(z_n - x_n)^{\lambda+1}}$$
$$(\alpha + \beta + \ldots + \lambda \leq r);$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les coordonnées de celui des points $A_1, A_2, \ldots, A_m$ que l'on considère; $J(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est le terme que l'on dérive; le domaine d'intégration est formé, par exemple, de n cercles, tracés dans les plans $z_1, z_2, \ldots, z_n$, avec les centres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et avec le rayon $\frac{\rho}{\sqrt{n}}$, où ρ est le rayon de l'hypersphère correspondante. Ce domaine est alors tout entier situé sur cette hypersphère, ce qui prouve que le terme ne dépasse pas

$$M n^{\frac{r}{2}} \rho^{-r} r! \mu_p^k.$$

On peut donc prendre

$$M' = M n^{\frac{r}{2}} \rho^{-r} r!$$

La série des termes restants est donc moindre que

$$M' \Sigma \mu_p^k.$$

Soit λ le plus grand des μ_p

$$\lambda < 1.$$

Or

$$M' \sum \mu_p^k = M' \lambda^k \sum \left(\frac{\mu_p}{\lambda}\right)^k < M' \lambda^k \sum \frac{\mu_p^2}{\lambda^2}.$$

Donc, pour k assez grand, cette somme est aussi petite que l'on veut : *ce qu'il fallait démontrer.*

10. Nous savons maintenant qu'il existe des fonctions invariantes par le groupe discontinu Γ. Nous restreindrons un peu le sens de l'expression *fonction automorphe*, que nous appliquerons désormais seulement aux fonctions qui peuvent s'obtenir comme quotients de deux fonctions Θ, et aux fonctions rationnelles de celles-ci. Cela revient à dire qu'une fonction automorphe est le quotient de deux polynomes de séries Θ, chaque terme de ces polynomes se multipliant par la même puissance du déterminant fonctionnel quand on applique aux variables les transformations de Γ.

Cette restriction paraît justifiée par cette remarque que, pour les groupes Γ dont on a poussé l'étude à un point plus avancé, les fonctions invariantes obtenues ainsi sont les plus simples de toutes.

Nous voyons que, même en se bornant à ce nouveau sens, il est

possible de trouver n fonctions automorphes dont le déterminant fonctionnel ne soit pas identiquement nul.

11. *Polyèdre fondamental.* — On nomme *polyèdre fondamental* du groupe discontinu Γ un domaine P situé dans le domaine principal, et tel que tout point de D ait un transformé par Γ appartenant à P, et que le transformé par une substitution S de Γ d'un point A de P n'appartiennent pas à P, à moins que A ne soit point double de S.

Le polyèdre fondamental, s'il existe, est très indéterminé. Si nous partageons P en deux parties P′ et P″, et que nous appliquions à P″ une transformation de Γ qui l'amène en P‴, P′ et P‴ forment ensemble un polyèdre fondamental.

Mais, jusqu'à présent, rien ne nous assure de l'existence de ce polyèdre.

12. Théorème. — *Tout groupe* Γ, *discontinu dans le domaine principal, admet un polyèdre fondamental* (*pourvu cependant que l'invariant fondamental soit, par exemple, analytique dans* D *par rapport aux parties réelles et imaginaires des coordonnées des deux points dont il dépend*).

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_m$ m points quelconques de D; m peut être quelconque, de *un* à l'infini. Soit

$$\Phi_h = I(M, A_h) \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

où I est l'invariant fondamental et M un point variable. Appliquons aux points A_h successivement toutes les substitutions S_p de Γ; soit $\Phi_h S_p$ ce que devient ainsi Φ_h.

Fixons M dans D, et soit λ un nombre compris entre λ′ et λ″ [hypothèse (II, 5)]. *Il y a seulement un nombre fini de systèmes de valeurs de p et de h tels que*

$$\Phi_h S_p < \lambda.$$

En effet, quand p augmente indéfiniment, les transformés des A_h ont comme points d'accumulation uniquement des points de la frontière de D, d'après le n° 3. Donc, d'après (II, 7), les $\Phi_h S_p$ tendent vers λ″, ce qui démontre la proposition.

Donc, il y a certains systèmes de valeurs de p et de h pour lesquels $\Phi_h S_p$ atteint son minimum absolu. Il y aura en général un seul système de telles valeurs, si aucun des A_k n'est point double d'une substitution de Γ non identique, et si aucun d'eux n'est transformé en un autre par quelque substitution de Γ : en effet, même si M varie dans un ensemble fermé R, intérieur à D, il y a seulement un nombre fini de $\Phi_h S_p$ inférieurs à λ ; comme deux d'entre eux doivent être égaux pour qu'il n'y ait pas de minimum unique, cette circonstance n'a lieu que pour les points de R appartenant à certaines multiplicités.

Cela étant, une condition *nécessaire* pour que M fasse partie du polyèdre fondamental que nous cherchons à construire est que, pour l'un des $\Phi_h S_p$ correspondant au minimum, $p = 1$, S_1 étant la substitution identique.

Si pour *tous* ces $\Phi_h S_p$, $p = 1$, la condition est aussi *suffisante*.

Si le minimum est atteint pour $p = 1$ et pour diverses autres valeurs $p', p'', \ldots, p^{(k)}$ de p, on range dans P un et un seul des points obtenus en appliquant à M les substitutions inverses de $S_1, S_{p'}, \ldots, S_{p^{(k)}}$. Le choix peut se faire en remplaçant, pour les points qui présentent cette particularité, $A_1, A_2, \ldots, A_m$ par un autre système de points; puis, pour les points sur lesquels cela ne suffirait pas, on introduirait un troisième système, et ainsi de suite. Le seul cas où le minimum reste indéfiniment atteint pour plusieurs valeurs de p est celui où M est point double d'une substitution non identique de Γ : car, pour les autres points, le nombre de dimensions de la multiplicité qu'ils forment diminue à chaque nouveau système introduit. Au bout d'un certain nombre fini d'opérations, P sera entièrement déterminé. Il est évident que c'est bien un polyèdre fondamental. *Le théorème est démontré.*

13. Le polyèdre fondamental qu'on vient de construire se nomme polyèdre fondamental *rayonné*; $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sont ses *centres*. En toute rigueur, il faudrait aussi indiquer les centres auxiliaires qui ont remplacé $A_1, A_2, \ldots, A_m$ pour certains points de P; mais, comme il résulte de la démonstration qu'en général ces centres auxiliaires n'interviennent que pour les points-frontières de P, et comme la construction de P, pour ces points-frontières, peut s'achever souvent plus-

commodément par d'autres procédés, on se bornera ordinairement à indiquer le premier système de centres.

P n'est pas forcément d'un seul tenant (linéairement connexe).

14. Si l'on applique à P successivement toutes les transformations de Γ, on a un système de polyèdres qui recouvre tout le domaine principal, et une seule fois chaque point de celui-ci autre que les points doubles des transformations non identiques de Γ.

La multiplicité $2n-1$ fois étendue qui sert de frontière commune à P et à l'un de ses transformés se nomme une *face* de P; la portion de frontière commune à P et à D, si elle a $2n-1$ dimensions, est aussi une face, ou un système de faces.

Si nous excluons le cas où les intersections présenteraient des singularités, nous pouvons dire que les faces se rencontrent suivant des *arêtes* à $2n-2$ dimensions, celles-ci suivant des *arêtes* à $2n-3$ dimensions, et ainsi de suite, jusqu'aux *arêtes* à une dimension qui se rencontrent aux *sommets*.

Si $n=1$, on dit *polygone* au lieu de polyèdre, et *côté* au lieu de face; il n'y a pas d'arêtes.

15. *Faces opposées.* — Si l'on sort de P en franchissant une de ses faces F, non situées sur la frontière de D, on entre dans un polyèdre fondamental P′ transformé de P par une substitution S de Γ. Appliquons à P′ la transformation S^{-1} : il vient coïncider avec P; F, considérée comme face de P′, vient coïncider avec une face F′ de P, en général différente de F : on dit que F et F′ sont des faces *opposées* de P.

Nous renvoyons aux *Leçons sur les fonctions automorphes* pour le cas où F et F′ seraient confondues.

16. *Cycles d'arêtes, de sommets.* — On nomme *cycle d'arêtes à p dimensions* ou *cycle de sommets* un système d'arêtes à p dimensions ou de sommets de P tels que chaque élément du cycle soit transformé de l'un d'entre eux par une transformation de Γ et une seule, à moins que tous les points de cet élément ne soient points doubles d'une substitution non identique de Γ.

Nous renvoyons encore aux *Leçons sur les fonctions automorphes*

pour la détermination de ces cycles et l'indication des particularités qui se présentent quand P est rayonné, et suivant que les éléments du cycle sont ou non tous situés sur la frontière du domaine principal. C'est une étude assez longue, qui conduit notamment, par la considération des cycles d'arêtes à $2n-2$ dimensions, à des conditions *nécessaires* pour qu'un polyèdre donné P soit polyèdre fondamental d'un groupe discontinu. Si l'on joint à ces conditions d'autres conditions nécessaires relatives aux cycles d'éléments à un nombre quelconque de dimensions entièrement situés sur la frontière de D, et si l'on suppose, en outre, que les arêtes à moins de $2n-2$ dimensions sont linéairement *simplement* connexes, et que D lui-même est linéairement simplement connexe, on a des conditions suffisantes.

17. On peut donner une application immédiate de la notion de polyèdre fondamental en considérant le cas où ce polyèdre ni sa frontière n'atteignent la frontière du domaine principal. Alors, $n+1$ *fonctions automorphes quelconques sont liées par une relation algébrique.*

Soient, en effet, $F_1, F_2, \ldots, F_n$, n fonctions automorphes dont le déterminant fonctionnel n'est pas identiquement nul (n° 10). Elles se comportent dans tout le polyèdre fondamental, frontière comprise, comme des fonctions rationnelles. Donc, les n équations

$$F_k = a_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

où les a_k sont des constantes données, ont en général un nombre fini de racines communes dans ce polyèdre; exceptionnellement, les racines communes peuvent former des multiplicités analytiques (1).

Quand ces points-racines sont en nombre fini, ce nombre est constant. En effet, il ne peut varier que si l'un des points-racines entre dans le polyèdre fondamental ou en sort; mais alors un autre point-racine en sort ou y entre par la face opposée; le total n'est donc pas changé (2). Soit m ce nombre constant.

---

(1) *Cf.* POINCARÉ, *Sur les fonctions abéliennes* (*Acta math.* t. XXVI): ce que l'illustre géomètre appelle théorème A s'applique ici presque sans modification.

(2) C'est le raisonnement employé par M. Picard dans les circonstances de ce genre: Poincaré (*Ibid.*) emploie les intégrales de Kronecker.

Soit F_{n+1} une $(n+1)^{\text{ième}}$ fonction automorphe. On peut la considérer comme fonction de $F_1, F_2, \ldots, F_n$; cette fonction a m déterminations au plus, une pour chaque point-racine. Les fonctions symétriques de ces m déterminations sont sans singularité essentielle (1): ce sont donc des fonctions rationnelles (2). Donc, $F_1, F_2, \ldots, F_n, F_{n+1}$ sont liées par une relation algébrique, C.Q.F.D.

18. En outre, *toutes les fonctions automorphes du groupe s'expriment rationnellement au moyen de $n+1$ d'entre elles* (de n dans certains cas).

En effet, nous pouvons choisir F_{n+1} de manière que ses valeurs aux m points-racines, pour un système particulier de valeurs de $F_1, F_2, \ldots, F_n$, soient différentes (n° 9). Si alors F est une fonction automorphe quelconque du groupe, on a identiquement

$$\Phi(F, F_1, F_2, \ldots, F_n) = 0,$$
$$\Psi(F, F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}) = 0,$$

Φ et Ψ étant des polynomes; ces deux équations en F ont en général une seule racine commune, donc celle ci est fonction rationnelle de $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$.

S'il était possible de choisir $F_1, F_2, \ldots, F_n$ de manière que le nombre m des points-racines soit égal à *un*, F serait fonction rationnelle de $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

Les fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$, au moyen desquelles toutes les autres sont exprimables rationnellement, sont elles-mêmes liées par une relation algébrique

$$R(F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}) = 0;$$

on a là une multiplicité algébrique à un point de laquelle correspond (en général) un point et un seul du polyèdre fondamental, et réciproquement.

19. Les hypothèses (H) ne spécifient rien sur l'extérieur du domaine principal. Introduisons quelques hypothèses supplémentaires pour dire quelques mots de ce qui se passe en dehors de ce domaine. Nous

(1) POINCARÉ. *loc. cit.*

(2) COUSIN, *Acta math.*, t. XIX, 1895.

admettrons que les transformations de (Γ) sont birationnelles (de manière à ne pas introduire tout de suite des singularités essentielles). Nous supposerons en outre que, si A est un point extérieur au domaine principal, B un point de ce domaine, Σ une hypersphère de centre A (ou un domaine ouvert contenant A), le rapport des valeurs absolues en A et en B des déterminants fonctionnels des transformations de Γ qui ne deviennent pas infinis dans Σ, reste inférieur à un nombre fixe; et que cela a encore lieu si l'on remplace A par un point variable A′ d'un ensemble fermé intérieur à Σ :

$$\left|\frac{\Delta_{A'}}{\Delta_B}\right| < M,$$

Δ étant le déterminant fonctionnel; M est indépendant de A′ et de la substitution considérée. Enfin, nous pourrons supposer que l'invariant fondamental a encore un sens, et reste symétrique, quand l'un des points dont il dépend sort du domaine principal.

20. Cela étant, si un groupe Γ discontinu dans le domaine principal est tel que les infinis des déterminants fonctionnels de ses transformations ne pénètrent qu'en nombre fini dans un ensemble ouvert Σ, la convergence des séries Θ aura encore lieu dans Σ si la fonction *rationnelle* Π est convenablement choisie (par exemple si Π est constante); par suite, les fonctions automorphes existeront. Mais il faut remarquer que nous supposons plus que la discontinuité de Γ dans Σ, sauf si $n = 1$: car, si $n > 1$, les infinis des déterminants fonctionnels forment des multiplicités analytiques, et non des points isolés.

Il peut arriver également que l'on puisse prolonger le polyèdre fondamental à l'extérieur du domaine principal, en considérant les minima, ou les maxima, de certaines suites d'invariants fondamentaux, le ou les centres restant dans le domaine principal (ceci n'est pas indispensable).

21. Voici, brièvement indiquées, quelques-unes des complications que l'on est exposé à rencontrer hors du domaine principal (¹).

(¹) *Voir*, pour les exemples, ma Thèse de Doctorat (*Annales de l'École Normale sup.*, 1915).

Le polyèdre fondamental et ses transformés par Γ peuvent ne pas comprendre un certain ensemble de points; cet ensemble est variable avec le ou les centres choisis.

Les fonctions automorphes ont des singularités essentielles dont la position peut dépendre des fonctions *rationnelles* H qui figurent dans les séries Θ.

Ces singularités essentielles peuvent pénétrer à l'intérieur du polyèdre fondamental, sans qu'il soit possible de se débarrasser de cette particularité en modifiant la construction des fonctions automorphes.

Aucune de ces circonstances gênantes ne se présente pour les groupes de Poincaré ($n = 1$); M. Picard a indiqué récemment (¹) un exemple à deux variables qui paraît assez simple à cet égard.

Il faut remarquer que ces particularités ne tiennent pas uniquement à la façon dont (Γ) se comporte en dehors du domaine principal; il y a des cas où elles tiennent au choix du domaine principal : on se rappelle que ce choix influe sur les séries Θ, puisque, pour les former, on ramène ce domaine à distance limitée, et qu'on prend (au moins dans le cas général) H borné dans ce domaine.

Considérons, en effet, le groupe

$$\left(x, y; \frac{ax+b}{cx+d}, \frac{a'y+b'}{c'y+d'}\right) \quad (ad-bc = a'd'-b'c' = 1),$$

$a, b, c, d, a', b', c', d'$ étant réels (²). Ces transformations conservent les signes des coefficients de i dans x et y; en associant ces signes de toutes les manières possibles, on obtient quatre domaines ouverts, conservés par le groupe, et dans chacun desquels le groupe se comporte évidemment de la même façon. On verra plus loin que les hypothèses (H) sont satisfaites et que l'un quelconque de ces quatre domaines peut être pris pour domaine principal. Par exemple, si l'on considère le domaine

$$i(x-x_0) < 0, \qquad i(y-y_0) < 0$$

(¹) PICARD, *Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. XXXIII. 1916, p. 363.

(²) C'est un sous-groupe invariant du groupe hyperabélien de M. Picard; *voir* la seconde Partie de ce Mémoire.

(les indices zéro servant, ici et dans tout ce travail, à distinguer les imaginaires conjuguées), on le ramène à distance limitée en posant

$$x' = \frac{x - i}{x + i}, \qquad y' = \frac{y - i}{y + i};$$

ce domaine devient, en effet,

$$x' x'_0 < 1, \qquad y' y'_0 < 1.$$

Considérons le groupe des puissances de la substitution

$$(x, y; rx, y) \qquad (r > 1),$$

ou

$$\left(x', y'; \frac{(r+1)x' + r - 1}{(r-1)x' + r + 1}, y'\right).$$

Une série Θ est

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \mathrm{H}\left[\frac{(r^m+1)x' + r^m - 1}{(r^m-1)x' + r^m + 1}, y'\right] \frac{2^{2k} r^{mk}}{[(r^m-1)x' + r^m + 1]^{2k}}.$$

Les infinis du déterminant fonctionnel ont comme points d'accumulations les points des deux multiplicités

$$x' = \pm 1;$$

les infinis provenant de H s'accumulent au voisinage des mêmes multiplicités et, en outre de celles-ci,

$$y' = \beta_p,$$

les β_p étant les pôles des fonctions d'une variable

$$\mathrm{H}(1, y'), \quad \mathrm{H}(-1, y'),$$

supposées non constantes. On aperçoit ainsi des singularités essentielles mobiles, situées dans des domaines qui auraient pu être pris pour domaine principal (en dehors de ces multiplicités, la convergence uniforme a lieu).

C'est à cause de ces complications que, sauf dans le cas d'une variable, des propositions donnant de nouveaux cas, où les fonctions automorphes d'un même groupe sont liées par des relations algé-

briques, n'ont été trouvées que pour des groupes dont les fonctions automorphes ne se prolongent pas analytiquement hors du domaine principal. De ces derniers groupes, les uns sont complètement donnés numériquement : leur origine est ordinairement arithmétique ; d'autres sont supposés seulement jouir de la propriété qui vient d'être énoncée, et de celle que leur polyèdre fondamental a un nombre fini de faces.

SECONDE PARTIE.

I. — Les groupes linéaires de Poincaré, de M. Picard, de M. Fubini.

1. Considérons un hermitien $f(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$ à $n+1$ variables, de discriminant non nul, décomposable en n normes d'un signe et une de l'autre. Nous prendrons toutes les substitutions semblables de cet hermitien, et nous poserons

$$x_p = y_p : y_{n+1} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ éprouvent alors un groupe (Γ) de substitutions linéaires fractionnaires :

$$X_m = \frac{\sum_{p=1}^{n} a_{m,p} x_p + a_{m,n+1}}{\sum_{p=1}^{n} a_{n+1,p} x_p + a_{n+1,n+1}} \qquad (m = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

On va démontrer que *ce groupe satisfait aux hypothèses* (II). Il suffira de se borner au cas où l'hermitien est

$$\sum_{p=1}^{n} y_p y_{p,0} - y_{n+1} y_{n+1,0}, \tag{3}$$

car, en le ramenant à ce type, on fait subir aux x une transformation

linéaire. Alors (Γ) conserve le domaine

$$\sum_{p=1}^{n} x_p x_{p,0} < 1, \tag{4}$$

entièrement situé à distance limitée: on verra que *c'est le domaine principal*. Nous voyons déjà que les deux premières hypothèses (H) sont satisfaites.

2. Pour vérifier la troisième hypothèse (H), calculons le déterminant fonctionnel de la transformation (2): nous n'aurons pas besoin du fait que (4) est conservé par cette transformation.

Nous considérerons, en même temps que (2), la substitution

$$Y_m = \sum_{p=1}^{n+1} a_{m,p} y_p \qquad (m = 1, 2, \ldots, m+1), \tag{5}$$

dont Δ sera le déterminant. Les x sont toujours liés aux y par (1).

Le symbole d servant à désigner les dérivations par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_{n+1}$, et le symbole δ celles par rapport aux y, on a, φ étant une fonction quelconque,

$$\frac{d\varphi}{dx_p} = y_{n+1} \frac{\delta\varphi}{\delta x_p} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\frac{d\varphi}{dy_{n+1}} = \sum_{p=1}^{n} x_p \frac{\delta\varphi}{\delta y_p} + \frac{\delta\varphi}{\delta y_{n+1}};$$

d'où

$$\frac{\delta\varphi}{\delta y_p} = \frac{1}{y_{n+1}} \frac{d\varphi}{dx_p} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta y_{n+1}} = \frac{d\varphi}{dy_{n+1}} - \sum_{p=1}^{n} x_p \frac{\delta\varphi}{\delta y_p}.$$

Donc, dans

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\delta Y_1}{\delta y_1} & \frac{\delta Y_1}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta Y_1}{\delta y_{n+1}} \\ \frac{\delta Y_2}{\delta y_1} & \frac{\delta Y_2}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta Y_2}{\delta y_{n+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\delta Y_{n+1}}{\delta y_1} & \frac{\delta Y_{n+1}}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta Y_{n+1}}{\delta y_{n+1}} \end{vmatrix}.$$

nous pouvons remplacer les éléments de la dernière colonne par

$$\frac{\partial Y_1}{\partial y_{n+1}}, \quad \frac{\partial Y_2}{\partial y_{n+1}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial y_{n+1}};$$

ensuite on exprimera les autres dérivées δ par les dérivées d, ce qui donne

$$\Delta = y_{n+1}^{-n} \frac{\partial(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n+1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_{n+1})}. \tag{6}$$

Mais

$$Y_m = X_m Y_{m+1} \qquad (m = 1, 2, \ldots, n);$$

donc

$$\frac{\partial Y_m}{\partial x_p} = \frac{\partial X_m}{\partial x_p} Y_{n+1} + X_m \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial x_p},$$

et, X_m ne dépendant pas de y_{n+1},

$$\frac{\partial Y_m}{\partial y_{n+1}} = X_m \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial y_{n+1}} \qquad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la formule (6), des simplifications se produisent et l'on trouve

$$\Delta = \frac{Y_{n+1}^n}{y_{n+1}^n} \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \ldots & 0 \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \cdot \\ \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial x_1} & \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial y_{n+1}} \end{vmatrix};$$

ou, Y_{n+1} dépendant de y_{n+1} d'une façon linéaire et homogène,

$$\Delta = \left(\frac{Y_{n+1}}{y_{n+1}}\right)^{n+1} \frac{\partial(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

ou bien

$$\frac{\partial(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{\Delta}{\left(\sum_{p=1}^{n} a_{n+1,p} x_p + a_{n+1,n+1}\right)^{n+1}}. \tag{7}$$

3. Ici, (3) étant conservé par (5),

$$|\Delta| = 1; \tag{8}$$

en outre

$$\sum_{p=1}^{n} |a_{n+1,p}|^2 - |a_{n+1,n+2}|^2 = -1. \tag{9}$$

Cette dernière relation prouve que

$$\left| \frac{a_{n+1,p}}{a_{n+1,n+1}} \right| < 1 \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Or le rapport des valeurs absolues du déterminant fonctionnel en deux points de l'ensemble fermé R [hypothèse (H, 5)] ne dépend que des $a_{n+1,p} : a_{n+1,n+1}$ et des coordonnées de ces deux points, en tout $6n$ variables réelles. Le domaine de variation de ces $6n$ variables est borné et fermé; le rapport est une fonction *continue* dans ce domaine: donc les nombres M et m existent.

4. Pour vérifier les hypothèses suivantes, nous allons tout d'abord voir que (Γ) *est transitif dans* (4).

Il suffit de voir que l'origine peut être changée par (Γ) en un point quelconque de ce domaine. Or, le transformé de l'origine par (2) a pour coordonnées

$$x_p = a_{p,n+1} : a_{n+1,n+1},$$

d'où

$$a_{p,n+1} = x_p a_{n+1,n+1}.$$

Mais

$$\sum_{p=1}^{n} |a_{p,n+1}|^2 - |a_{n+1,n+1}|^2 = -1,$$

donc

$$\left(\sum_{p=1}^{n} |x_p|^2 - 1 \right) |a_{n+1,n+1}|^2 = -1;$$

cette relation peut être satisfaite, le coefficient de $|a_{n+1,n+1}|^2$ étant par hypothèse négatif. Les $a_{p,n+1}$ étant ainsi obtenus, on trouve sans difficulté les autres coefficients, qui satisfont aux relations

$$\sum_{p=1}^{n} |a_{m,p}|^2 - |a_{m,n+1}|^2 = 1 \qquad (m = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\sum_{p=1}^{n} a_{l,p} a_{m,p,0} - a_{l,n+1} a_{m,n+1,0} = 0 \qquad (l, m = 1, 2, \ldots, n+1;\ l \neq m);$$

les conditions de possibilité sont toutes satisfaites.

5. Ce point acquis, on va voir que

$$(10)\qquad \frac{\left|\sum_{p=1}^{n} y_p \eta_{p,0} - y_{n+1}\eta_{n+1,0}\right|^2}{\left(\sum_{p=1}^{n} y_p y_{p,0} - y_{n+1}y_{n+1,0}\right)\left(\sum_{p=1}^{n} \eta_p \eta_{p,0} - \eta_{n+1}\eta_{n+1,0}\right)}$$

jouit des propriétés de l'invariant fondamental.

Tout d'abord (10) ne dépend évidemment que de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et des

$$\xi_p = \eta_p : \eta_{n+1}.$$

En outre, c'est une fonction réelle, symétrique, continue et invariante : c'est l'hypothèse (II, 4).

Pour vérifier (II, 5), il suffit, à cause de la transitivité, de placer le centre $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ à l'origine; la multiplicité (1) de l'hypothèse est alors

$$(11)\qquad \sum_{p=1}^{n} |x_p|^2 = 1 - \frac{1}{\lambda};$$

l'hypothèse est évidemment satisfaite, λ' étant égal à *un*, et λ'' à l'infini.

L'hypothèse (II, 6) se vérifie tout de suite aussi sur (11).

Quant à (II, 7), elle est évidente sur (10).

Ainsi les hypothèses (II) sont toutes satisfaites.

On vérifie aussi facilement les hypothèses du n° 19 (première partie), regardant l'extérieur du domaine principal.

6. On a encore la propriété intéressante suivante :

Un groupe Γ, *d'une infinité énumérable de substitutions du type considéré ici, et qui ne contient pas de substitution infinitésimale, est discontinu dans le domaine principal.*

On dit qu'un groupe contient une substitution infinitésimale quand, quel que soit le nombre positif ε, il contient une substitution dont les coefficients diffèrent de ceux de la substitution identique de moins de ε en valeur absolue.

Il suffit de prouver qu'un groupe qui n'est pas discontinu dans le domaine principal contient une substitution infinitésimale. Pour cela, on considère les points O ($x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$) et A_k (tous les x nuls, sauf que $x_k = 1 : 2$), et l'on démontre que les coefficients $a_{r,p}$ d'une substitution de (Γ) peuvent être considérés comme des fonctions continues des coordonnées des transformés de ces $n - 1$ points. Si le groupe Γ n'est pas discontinu, il transforme les points O, A_1, A_2, ..., A_n en des systèmes de points tels que les transformés de O aient O pour point d'accumulation, pendant que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ont d'autres points d'accumulation situés sur l'hypersphère

$$\sum_{p=1}^{n} |x_p|^2 = 1 : 4.$$

Dans ces conditions, la continuité des $a_{m,p}$ est uniforme, et l'on obtient immédiatement les substitutions infinitésimales. Le calcul complet se trouve dans les *Leçons* citées.

Cette proposition a été énoncée et démontrée par M. Fubini d'une manière plus générale. Si l'on essaie d'appliquer le même raisonnement aux groupes (Γ) de la première Partie, on est conduit à exprimer les paramètres des substitutions de (Γ) en fonctions des coordonnées des transformés d'un nombre suffisant de points du domaine principal. Mais il n'est pas évident que le système de points d'accumulation auquel on est conduit comme ci-dessus soit, dans le cas général, un transformé du système initial de points.

Ce théorème prouve immédiatement la discontinuité dans le domaine principal des groupes obtenus en partant d'un hermitien $f(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$ du type indiqué et à coefficients entiers d'un corps quadratique imaginaire k : on prend pour Γ les substitutions semblables à coefficients entiers dans k (¹).

7. On verra encore, dans les *Leçons*, que, si $n > 1$, on ne peut pas prendre d'autre domaine principal que celui indiqué; si $n = 1$, on peut

(¹) *Voir*, pour ces groupes, PICARD, *Acta math.*, t. I et V; *Ann. de l'Éc. Norm. sup.*, 3ᵉ série, t. I, 1884.

prendre aussi

$$|x_1|^2 > 1,$$

On démontre aussi au même endroit que l'algorithme considéré ici, appliqué à des hermitiens de discriminant non nul et d'un autre type que celui qui a été indiqué, conduit à des groupes qui ne satisfont pas aux hypothèses (H). Cependant, si l'hermitien est défini, le groupe obtenu peut se relier à un groupe qui satisfait à ces hypothèses : on trouve alors que les groupes discontinus qu'on peut obtenir ainsi ne comprennent qu'un nombre fini de substitutions.

8. Si $n = 1$, les groupes considérés dans ce Chapitre coïncident avec les groupes de Poincaré, mais ce point de vue est dû à M. Picard. Si $n = 2$, on obtient des groupes considérés en premier lieu par M. Picard; le cas de $n > 2$ est dû à M. Fubini.

9. Considérons l'expression différentielle, évidemment invariante

$$\frac{\left|\sum_{p=1}^{n} y_{p,0}\,dy_p - y_{n+1,0}\,dy_{n+1}\right|^2 - \left(\sum_{p=1}^{n}|y_p|^2 - |y_{n+1}|^2\right)\left(\sum_{p=1}^{n}|dy_p|^2 - |dy_{n+1}|^2\right)}{\left(\sum_{p=1}^{n}|y_p|^2 - |y_{n+1}|^2\right)^2};$$

on suppose, en l'écrivant, qu'on a affaire à l'hermitien (3). On peut démontrer qu'elle ne dépend que des x et de leurs différentielles. En effet, le numérateur est le produit des matrices

$$-\begin{Vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & -y_{n+1} \\ dy_1 & dy_2 & \cdots & dy_n & -dy_{n+1} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} y_{1,0} & y_{2,0} & \cdots & y_{n+1,0} \\ dy_{1,0} & dy_{2,0} & \cdots & dy_{n+1,0} \end{Vmatrix};$$

on peut donc le mettre sous la forme d'une somme de produits de déterminants du second ordre tels que

$$\begin{vmatrix} y_p & y_q \\ dy_p & dy_p \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} y_{p,0} & y_{q,0} \\ dy_{p,0} & dy_{p,0} \end{vmatrix};$$

sur cette nouvelle expression, on voit qu'on peut combiner linéaire-

ment les *lignes* des matrices comme celles de déterminants. On a

$$y_p = x_p y_{n+1}, \qquad dy_p = x_p\, dy_{n+1} + y_{n+1}\, dx_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, n);$$

on voit ainsi qu'on peut, dans notre invariant différentiel, remplacer y_p et dy_p $(p = 1, 2, \ldots, n)$ par x_p et dx_p, y_{n+1} par 1, dy_{n+1} par 0. L'invariant est donc

$$\frac{\left[\sum_{p=1}^{n} x_p\, dx_p\right]^2 - \left(1 - \sum_{p=1}^{n} |x_p|^2\right)\sum_{p=1}^{n} |dx_p|^2}{\left(1 - \sum_{p=1}^{n} |x_p|^2\right)^2}.$$

Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est dans le domaine principal, cet invariant est, par rapport aux différentielles des parties réelles et imaginaires des x, une forme quadratique définie : car, si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vient à l'origine, il devient

$$\sum_{p=1}^{n} |dx_p|^2.$$

Cet invariant joue un grand rôle dans les travaux de M. Fubini.

De l'existence de cet invariant, on déduit l'existence d'intégrales invariantes de tous les ordres de multiplicité, de 1 à $2n$, en s'appuyant sur le théorème algébrique suivant, qu'on trouvera dans les *Leçons* citées :

Soit la substitution linéaire

$$\left(x_m; \sum_{p=1}^{n} a_{m,p} x_p\right)$$

qui change la forme quadratique

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{m=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} A_{m,p} x_m x_p$$

en

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{m=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} B_{m,p} x_m x_p.$$

Considérons les variables à r indices $(1 \leq r \leq n)$ $z_{\alpha,\beta,\ldots,\delta}$, *qui changent de signe quand on échange deux indices* (leur nombre est celui des combinaisons de n objets r à r, car les indices peuvent varier de 1 à n). *La substitution*

$$\left(z_{\alpha,\beta,\ldots,\delta};\ \frac{1}{r!}\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\cdots\sum_{\varpi=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{\alpha,\lambda} & a_{\alpha,\mu} & \cdots & a_{\alpha,\varpi} \\ a_{\beta,\lambda} & a_{\beta,\mu} & \cdots & a_{\beta,\varpi} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\delta,\lambda} & a_{\delta,\mu} & \cdots & a_{\delta,\varpi} \end{vmatrix} z_{\lambda,\mu,\ldots,\varpi} \right)$$

change la forme quadratique

$$\left(\frac{1}{r!}\right)^2\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\cdots\sum_{\delta=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\cdots\sum_{\varpi=1}^{n}\begin{vmatrix} A_{\alpha,\lambda} & A_{\alpha,\mu} & \cdots & A_{\alpha,\varpi} \\ A_{\beta,\lambda} & A_{\beta,\mu} & \cdots & A_{\beta,\varpi} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{\delta,\lambda} & A_{\delta,\mu} & \cdots & A_{\delta,\varpi} \end{vmatrix} z_{\alpha,\beta,\ldots,\delta}\, z_{\lambda,\mu,\ldots,\varpi}$$

en la forme analogue où les A *sont remplacés par les* B.

Pour appliquer ce théorème à notre objet, on fait jouer aux différentielles des parties réelles et imaginaires de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ le rôle des variables x du théorème, et aux éléments d'intégrale d'ordre r

$$d(x'_1, x'_2, \ldots, x'_r) \qquad (x_p = x'_p + ix''_p)$$

ou autres analogues où les x' et les x'' sont mêlés d'une façon quelconque, le rôle des variables z du théorème.

En particulier, l'intégrale invariante d'ordre $2n$

$$\int \frac{d(x'_1, x''_1, x'_2, \ldots, x''_n)}{\left(1 - \sum_{p=1}^{n} |x_p|^2\right)^{n+1}}$$

a été employée, pour $n = 2$, par M. Picard. Poincaré a annoncé (¹), pour $n = 2$, l'existence des intégrales invariantes doubles et triples, et donné explicitement l'intégrale simple.

Toutes ces intégrales invariantes ont un sens quand la multiplicité d'intégration est dans le domaine principal, car si la forme

(¹) Poincaré, *Œuvres*, t. II, p. 62.

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de notre théorème algébrique est définie, il en est de même de la forme relative aux variables z.

II. — Groupes quadratiques, comprenant les groupes hyperabéliens.

1. Considérons une forme quadratique réelle, à $n-2$ variables, de discriminant non nul, décomposable en n carrés d'un signe et *deux* de l'autre; nous l'écrirons pour plus de commodité

$$y_{n+1}y_{n+2} - \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n), \tag{1}$$

φ ayant un carré positif et un seul. Posons

$$x_p = y_p : y_{n+2} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n+1). \tag{2}$$

Aux substitutions semblables réelles de (1) correspondent des substitutions linéaires fractionnaires pour les x. Si, pour le point initial,

$$x_{n+1} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{3}$$

cette relation subsiste pour le point transformé. En nous bornant aux valeurs des x qui satisfont à (3), nous faisons ainsi correspondre aux substitutions sur les y

$$\left(y_m ; \sum_{p=1}^{n+2} a_{m,p} y_p\right) \qquad (m = 1, 2, \ldots, n+2) \tag{4}$$

une substitution sur les x

$$\left\{ X_m = \frac{\sum_{p=1}^{n} a_{m,p} x_p + a_{m,n+1}\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + a_{m,n+2}}{\sum_{p=1}^{n} a_{n+1,p} x_p + a_{n+2,n+1}\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + a_{n+2,n+1}} \right. \tag{5}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces formules entraînent

$$\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{\sum_{p=1}^{n} a_{n+1,p} x_p + a_{n+1,n+1}\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + a_{n+1,n+2}}{\sum_{p=1}^{n} a_{n+2,p} x_p + a_{n+2,n+1}\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + a_{n+2,n+2}}.$$

Ces transformations (5) se réduisent à des substitutions linéaires fractionnaires si $n = 1$; mais pour $n > 1$, ce sont des transformations birationnelles quadratiques.

Le groupe (Γ) que nous considérons dans cette section est un sous-groupe de celui des transformations (5); on va le définir complètement dans un instant.

2. Les substitutions (4) conservent évidemment l'inégalité

$$y_{n+1}y_{n+2,0} + y_{n+1,0}y_{n+2} = \sum_{p=1}^{n} y_{p,0}\frac{\partial\varphi}{\partial y_p} < 0. \tag{6}$$

Pour voir ce que cela donne avec les variables x, nous pouvons poser

$$\varphi = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - \ldots - y_n^2.$$

Alors, si

$$x_p = x'_p + i x''_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, n+1),$$

et si (3) est vérifiée, l'inégalité (6) devient

$$x_1'^2 - x_2''^2 - x_3''^2 - \ldots - x_n''^2 > 0. \tag{7}$$

Ce domaine (7), conservé par (5), n'est évidemment pas linéairement connexe, mais se partage en deux régions linéairement connexes : dans l'une de celles-ci x''_1 est positif ; dans l'autre x''_1 est négatif.

Parmi les transformations (5), les unes échangent ces deux régions, les autres les font revenir chacune sur elle-même : ces dernières constituent un groupe, *qui sera, par définition, le groupe* (Γ).

Disons tout de suite que, pour $n = 1$, nous avons de nouveau le groupe de Poincaré, et que c'est là le propre point de vue du célèbre mathématicien ; pour $n = 2$, c'est le groupe hyperabélien, que M. Picard

a considéré de cette manière dès son premier Mémoire (¹); pour $n = 3$, on retrouve les groupes qui font le sujet de ma Thèse de Doctorat (²).

3. On va voir que, quel que soit n, (Γ) *satisfait* aux hypothèses (H). Le domaine principal D sera défini par l'inégalité (7) jointe à

$$x_1'' \geq 0. \tag{8}$$

On peut le ramener à distance bornée par la transformation birationnelle

$$z_1 = \frac{1}{x_1 + i}; \qquad z_p = \frac{1}{x_1 + x_p + i} \qquad (p = 2, 3, \ldots, n). \tag{9}$$

car, dans D, chacune des variables z est inférieure à *un* en valeur absolue.

Donc, les hypothèses (H, 1 et 2) sont satisfaites.

4. Calculons le déterminant fonctionnel, pour vérifier (H, 3).

Nous désignerons par des majuscules les variables transformées; le symbole δ désignera ici les dérivations par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, non liées par (3); ∂ désignera les dérivations par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, (3) ayant lieu.

Nous avons, d'après la première section,

$$\frac{\delta(X_1, X_2, \ldots, X_{n+1})}{\delta(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})} = \Delta \left(\frac{y_{n+2}}{Y_{n+2}} \right)^{n+2}, \tag{10}$$

Δ étant le déterminant de (4), c'est-à-dire ± 1. Mais, f étant une fonction quelconque,

$$\frac{\partial f}{\partial x_p} = \frac{\delta f}{\delta x_p} - \frac{\delta f}{\delta x_{n+1}} \varphi'_{x_p} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n);$$

alors, dans le premier membre de (10), on peut remplacer les

(¹) PICARD, *Journal de Math.*, 4ᵉ série, t. I, 1885.

(²) G. GIRAUD, *Ann. Éc. Norm. sup.*, 3ᵉ série, t. XXXII, 1915.

dérivées δ, par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, par les dérivées ∂. De plus

$$\frac{\partial X_{n+\cdot}}{\partial x_p} = \sum_{m=1}^{n} \varphi'_{X_m} \frac{\partial X_m}{\partial x_p} \qquad (p+1, 2, \ldots, n);$$

donc, le premier membre de (10) peut s'écrire

$$\frac{\partial(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \left[\frac{\delta X_{n+1}}{\delta x_{n+1}} - \sum_{m=1}^{n} \varphi'_{X_m} \frac{\delta X_m}{\delta x_{n+1}} \right].$$

Le crochet s'écrit aussi

$$\frac{\delta}{\delta x_{n+1}} [X_{n+1} - \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)]$$

ou

$$\lim_{x_{n+1}=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \frac{X_{n+1} - \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{x_{n+1} - \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \left(\frac{y_{n+2}}{Y_{n+2}}\right)^2.$$

En comparant avec (10), nous obtenons

$$(11) \quad \frac{\partial(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \Delta \left(\frac{y_{n+2}}{Y_{n+2}}\right)^n = \frac{\Delta}{\left[\sum_{p=1}^{n} a_{n+2,p} x_p + a_{n+2,n+1} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + a_{n+2,n+2}\right]^n}.$$

Ce qui intervient dans (H, 3), c'est

$$\frac{\partial(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)}{\partial(z_1, z_2, \ldots, z_n)},$$

les z étant donnés par (9); ceci s'écrit encore

$$\frac{(x_1+i)^2 (x_1+x_2+i)^2 \ldots (x_1+x_p+i)^2}{(X_1+i)^2 (X_1+X_2+i)^2 \ldots (X_1+X_p+i)^2} \frac{\partial(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

On vérifie facilement (1) que le rapport des valeurs absolues de chaque facteur en deux points de l'ensemble fermé R intérieur à D reste compris entre deux nombres positifs fixes. Donc il en est de même pour le produit, et (H, 3) est vérifié.

(1) *Cf.* ma Thèse ou les *Leçons* citées.

5. Pour vérifier les hypothèses suivantes, nous démontrerons encore que (Γ) est *transitif dans* D.

Tout d'abord (Γ) comprend la substitution qui consiste à augmenter chacun des x d'un nombre réel arbitraire; on le vérifie tout de suite. On peut donc amener un point quelconque $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de D à une position où les x soient purement imaginaires. Comme on est dans D, on vérifie tout de suite qu'on peut trouver alors une autre substitution de (Γ) annulant tous les x, sauf x_1, qui prendra la valeur i. La transitivité est ainsi vérifiée.

6. Les expressions suivantes,

$$\left| y_{n+1,0}\eta_{n+2} + y_{n+2,0}\eta_{n+1} - 2y_{1,0}\eta_1 + 2\sum_{p=2}^{n} y_{p,0}\eta_p \right|^2,$$

$$\left| y_{n+1}\ \eta_{n+2} + y_{n+2}\ \eta_{n+1} - 2y_1\ \eta_1 + 2\sum_{p=2}^{n} y_p\eta_p \right|^2,$$

ainsi que le premier membre de (6) et que l'expression analogue dépendant des η_i, sont invariantes par nos substitutions. On peut en tirer plusieurs invariants fondamentaux; nous vérifierons seulement que

$$(12)\quad \frac{\left| y_{n+1,0}\eta_{n+2} + y_{n+2,0}\eta_{n+1} - 2y_{1,0}\eta_1 + 2\sum_{p=2}^{n} y_{p,0}\eta_p \right|^2 + \left| y_{n+1}\ \eta_{n+2} + y_{n+2}\ \eta_{n+1} - 2y_1\ \eta_1 + 2\sum_{p=2}^{n} y_p\eta_p \right|^2}{\left(y_{n+1,0}y_{n+2} + y_{n+2,0}y_{n+1} - 2y_1y_{1,0} + 2\sum_{p=2}^{n} y_p y_{p,0} \right) \times \left(\eta_{n+1,0}\eta_{n+2} + \eta_{n+2,0}\eta_{n+1} - 2\eta_{1,0}\eta_{1,0} + 2\sum_{p=2}^{n} \eta_p\eta_{p,0} \right)}$$

en est un.

L'hypothèse (II, 4) se vérifie sans calcul. Pour vérifier (II, 5), nous pouvons, d'après la transitivité de (Γ), placer le point $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$

$$\xi_m = \eta_m : \eta_n + 2 \qquad (m = 1, 2, \ldots, n)$$

en $\xi_1 = i$, $\xi_2 = \xi_3 = \ldots = \xi_n = 0$. La multiplicité (1) de l'hypothèse est alors

$$(13)\qquad \frac{|\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) - 1 + 2ix_1|^2 + |\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) - 1 - 2ix_1|^2}{16(x_1''^2 - x_2''^2 - \ldots - x_n''^2)} = \lambda.$$

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un point de D; appliquons-lui une substitution de point double $(i, 0, \ldots, 0)$: le point reste situé du même côté de (13). En particulier, sans changer y_1, y_{n+1}, y_{n+2}, prenons une substitution conservant

$$y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_n^2;$$

nous pouvons en disposer de manière à annuler x_3', x_4', ..., x_n', x_4'', x_5'', ..., x_n'' : le point initial est amené dans une position particulière où x_1, x_2, x_3 sont les seules coordonnées non nulles; comme, d'après les propriétés des substitutions orthogonales, les coefficients de la transformation peuvent se ramener d'une façon continue à ceux de la transformation identique, on peut considérer que le point initial est venu dans cette position par un chemin continu ne rencontrant pas (13). On est ramené ainsi à vérifier (H, 5) pour $n = 3$: cela est fait dans ma Thèse ou dans les *Leçons* citées; λ' est égal à $\frac{1}{4}$, λ'' à l'infini.

Pour vérifier (H, 6), on remarque que, sur (13), $x_1''^2 - \ldots - x_n''^2$ est limité supérieurement, et qu'il en est de même tant que λ reste inférieur à un nombre fixe. Alors on écrit (13) sous la forme

$$|\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + 1|^2 + 4\sum_{p=2}^{n} |x_p|^2 = 8(\lambda - 1)(x_1''^2 - \ldots - x_n''^2),$$

où l'hypothèse (H, 6) est évidente.

Quant à (H, 7), elle se voit sur (12).

Ainsi les hypothèses (H) sont satisfaites.

Les hypothèses de la première partie, relatives à l'extérieur du domaine principal, le sont également.

7. On peut démontrer (voir *Leçons*) que, pour $n > 2$, il est impossible de prendre un autre domaine principal que celui qu'on a indiqué

ou son imaginaire conjugué. Si $n = 2$ et si

$$\varphi(x_1, x_2) = -x_1 x_2,$$

les plans des variables x_1 et x_2 se partagent chacun en deux demi-plans, qu'on peut associer de toutes les manières possibles pour former le domaine principal, à condition de se borner aux substitutions qui conservent les demi-plans associés. Si $n = 1$, le domaine principal indiqué et son conjugué remplissent tout le plan, sauf l'axe réel.

On démontre aussi que, si l'on applique l'algorithme de cette section à des formes quadratiques de discriminant non nul et qui ne soient pas du type indiqué, le groupe obtenu ne satisfait pas aux hypothèses (H). Cependant, si la forme quadratique est définie, le groupe peut se *prolonger* (au sens de la théorie des groupes) de manière à y satisfaire : on trouve alors que les groupes discontinus de cette dernière sorte comprennent seulement un nombre fini de substitutions.

8. *Un groupe* Γ (du type de cette section) *qui ne comprend pas de substitution infinitésimale est discontinu dans* D.

On le démontre en constatant que les paramètres d'une substitution de (Γ) s'expriment en fonctions continues des coordonnées des transformés des points $A_p[x_p = i, x_1 = 2i, x_m = 0 \text{ si } (m-1)(m-p) \neq 0]$

$(p = 2, 3, \ldots, n)$, $A_1(x_1 = i, x_2 = \ldots = x_n = 0)$, $A_{n+1}(x_1 = 2i, x_2 = \ldots = x_n = 0)$.

Ce théorème prouve immédiatement la discontinuité des groupes Γ obtenus en considérant les substitutions semblables à coefficients entiers des formes quadratiques du type voulu et à coefficients entiers (¹).

9. L'invariant différentiel suivant permet d'appliquer aux groupes

(¹) *Cf.* POINCARÉ, *Œuvres*, t. II, p. 463. — PICARD, *Journal de Math.*, 4ᵉ série, t. I, 1885. — GIRAUD, *Ann Éc. Norm. sup.*, 3ᵉ série, t. XXXII, 1915, et t. XXXIII, 1916.

de cette section les raisonnements de M. Fubini :

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}\left|y_{n+1,0}\,dy_{n+2}+y_{n+2,0}\,dy_{n+1}-2y_{1,0}\,dy_1+2\sum_{p=2}^{n}y_{p,0}\,dy_p\right|^2\\ -\left(y_{n+1,0}y_{n+2}+y_{n+2,0}y_{n+1}-2|y_1|^2+2\sum_{p=2}^{n}|y_p|^2\right)\left(dy_{n+1,0}\,dy_{n+2}\right.\\ \qquad\left.+\,dy_{n+2,0}\,dy_{n+1}-2|dy_1|^2+2\sum_{p=2}^{n}|dy_p|^2\right)\end{array}\right\}}{\left(y_{n+1,0}y_{n+2}+y_{n+2,0}y_{n+1}-2|y_1|^2+2\sum_{p=2}^{n}|y_p|^2\right)^2}.$$

On voit, comme dans la première section, que l'on peut remplacer y_p et dy_p par x_p et dx_p ($p=1, 2, \ldots, n+1$), y_{n+2} par 1, dy_{n+2} par 0. Si l'on tient compte, en outre, de la valeur de x_{n+1}, cet invariant s'écrit

$$\frac{2|x_1''\,dx_1-\sum_{p=2}^{n}x_p''\,dx_p|^2-\left(x_1''^2-\sum_{p=2}^{n}x_p''^2\right)\left(|dx_1|^2-\sum_{p=2}^{n}|dx_p|^2\right)}{2\left(x_1''^2-\sum_{p=2}^{n}x_p''^2\right)^2}.$$

Nous avons à vérifier que, dans D, c'est une forme hermitienne définie par rapport aux différentielles. Pour cela, nous plaçons $(x_1, x_p, \ldots, x_n)$ en $(x_1=i,\ x_2=x_3=\ldots=x_n=0)$; l'invariant est alors

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}|dx_p|^2;$$

la vérification est faite.

Nous pouvons donc encore affirmer l'existence d'intégrales invariantes de tous les ordres de 1 à $2n$. Celle d'ordre $2n$

$$\int^{(2n)}\frac{d(x_1', x_1'', \ldots, x_n'')}{(x_1'^2-x_2''^2-\ldots-x_n''^2)^n}$$

a été, pour $n=2$, employée par M. Picard.

III. — Groupes formés de plusieurs autres se prolongeant.

1. Soient (Γ_1), (Γ_2), ..., (Γ_r) des groupes à n_1, n_2, ..., n_r variables, satisfaisant aux hypothèses (H). Soient $x_{q,m}$ les variables du groupe (Γ_q) $(m = 1, 2, \ldots, n_q)$. Nous formons un groupe (Γ) à $n_1 + n_2 + \ldots + n_r$ variables en réunissant en un seul système les formules générales des substitutions de (Γ_1), (Γ_2), ..., (Γ_r). Si quelques-uns des groupes (Γ_1), (Γ_2), ..., (Γ_r) ne diffèrent que par les noms des variables, nous admettrons, en outre, dans (Γ) les substitutions qui consistent à échanger les variables d'un de ces groupes avec celles d'un autre, ainsi que les combinaisons de ces dernières substitutions entre elles et avec les précédentes.

On va démontrer que (Γ) *satisfait aux hypothèses* (H).

2, Soit D_q le domaine principal de (Γ_q). Le domaine principal D de (Γ) se projettera sur l'espace $(x_{q1}, x_{q2}, \ldots, x_{qn_q})$ suivant D_q : tout point dont les r projections sur ces r espaces sont respectivement intérieures à D_1, D_2, ..., D_q est dit appartenir à D.

En effet, si l'on effectue sur les r systèmes de variables les subtitutions qui amènent D_1, D_2, ..., D_r à distance bornée, D est ramené à distance bornée. De plus D est évidemment linéairement connexe. En outre, il est invariant par (Γ). Les hypothèses (H, 1 et 2) sont donc satisfaites.

3. Le déterminant fonctionnel d'une substitution de (Γ) est le produit des déterminants des substitutions composantes de (Γ_1), (Γ_2), ..., (Γ_r) multiplié par une puissance de -1 si quelques-uns des systèmes de variables sont échangés. On en conclut immédiatement que (H, 3) est satisfaite.

4. Soit I_q l'invariant fondamental de (Γ_q); soient λ'_q et λ''_q ses limites d'oscillation dans D_q.

$$I = \sum_{q=1}^{r} \frac{I_q - \lambda'_q}{\lambda''_q - I_q}$$

est un invariant fondamental de (Γ); si λ_q'' est infini, le terme correspondant de la somme précédente est à remplacer par $I_q - \lambda_q'$.

En effet, l'hypothèse (H, 4) est évidemment satisfaite.

Pour (H, 5), λ' et λ'' sont à remplacer par zéro et l'infini. En effet, si l'on considère la multiplicité

$$I = \lambda > 0,$$

on voit qu'elle a des points dans D en décomposant λ en r nombres positifs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$; comme l'équation

$$\frac{I_q - \lambda_q'}{\lambda_q'' - I_q} = \lambda_q$$

donne une valeur de I_q comprise entre λ_q' et λ_q'', la vérification est faite. Chacune des régions

$$I > \lambda, \qquad I < \lambda$$

est linéairement connexe. En effet, prenons, par exemple, la seconde; si $\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les valeurs des différents termes de I, chacun de ces termes peut être annulé en faisant décrire au point variable un chemin continu, et sans que, le long de ce chemin, la valeur de ce terme dépasse jamais sa valeur initiale. (H, 5) est donc satisfaite.

(H, 6) est presque évidente, car, si λ tend vers o, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ tendent vers o aussi et, par suite, I_q tend vers λ_q'.

Quant à (H, 7), elle est entièrement évidente.

Les hypothèses (H) *sont donc vérifiées.* On vérifierait de même les hypothèses relatives à l'extérieur du domaine principal, en les supposant vraies pour $(\Gamma_1), (\Gamma_2), \ldots, (\Gamma_r)$.

5. En particulier, les (Γ_q) peuvent être pris parmi les groupes des deux premières sections de cette Partie. Dans ce cas, l'absence de substitution infinitésimale suffit à prouver la discontinuité dans D.

En outre, ces groupes auront des intégrales invariantes de tous les ordres de multiplicité possibles : car en ajoutant purement et simplement les invariants différentiels des (Γ_q) qui sont des formes quadratiques définies de différentielles, on a un invariant du même type pour (Γ).

On retrouve ainsi d'une deuxième manière les groupes hyperabéliens de M. Picard.

NOTE.

Sur quelques groupes automorphes satisfaisant ou non aux hypothèses (H).

On peut déterminer, dans un groupe (Γ) satisfaisant aux hypothèses (H), un sous-groupe composé des substitutions qui satisfont à certaines conditions supplémentaires. On va voir que ce sous-groupe peut présenter des propriétés intéressantes nouvelles. On pourra aussi considérer un groupe *semblable* à ce sous-groupe, mais comportant moins de variables indépendantes : dans certains exemples, ce groupe ne satisfait pas aux hypothèses (H); néanmoins, le lien qui le rattache à un groupe y satisfaisant permet, au moins dans certains cas, de construire des fonctions automorphes correspondant à un groupe discontinu de cette sorte.

1. Les deux catégories de groupes que nous allons citer d'abord sont des généralisations d'un groupe d'origine arithmétique étudié par M. Picard (1).

Considérons, en premier lieu, la forme quadratique

$$y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2-y_{n+1}^2, \tag{1}$$

avec un carré négatif. Pour toute transformation semblable *réelle* de (1), les variables

$$x_m=y_m : y_{n+1} \qquad (m=1, 2, \ldots, n)$$

subissent des transformations linéaires, formant un groupe (Γ). Ce groupe peut être considéré comme un sous-groupe de ceux de la Section I de la deuxième partie de ce Mémoire, car il conserve l'hermitien

$$y_1y_{1,0}+y_2y_{2,0}+\ldots+y_ny_{n,0}-y_{n+1}y_{n+1,0};$$

(1) PICARD, *Ann. Scient. de l'Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XXXIII, 1916, p. 363.

cela suffit à nous montrer que les hypothèses (H) sont satisfaites, le domaine principal étant

$$\sum |x_m|^2 < 1. \tag{2}$$

Mais il y a avantage à rattacher ce groupe à ceux de la Section II. Posons

$$y_{n+2}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 - y_{n+1}^2;$$

si aux équations qui définissent une substitution semblable de (1) on ajoute l'équation

$$Y_{n+2} = y_{n+2},$$

on a une substitution semblable de

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 - y_{n+1}^2 - y_{n+2}^2; \tag{3}$$

et comme, pour les valeurs considérées des y, cette forme est nulle, on est bien dans le cas de la Section II. Les variables non homogènes à introduire seraient, par exemple,

$$z_m = y_m : (y_n - y_{n+2}) \qquad (m = 1, 2, \ldots, n-1),$$
$$z_n = y_{n+1} : (y_n - y_{n+2}).$$

Les x sont fonctions rationnelles des z :

$$x_m = z_m : z_n \qquad (m = 1, 2, \ldots, n-1),$$
$$x_n = (z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_{n-1}^2 - z_n^2 + 1) : 2 z_n;$$

et les z dépendent rationnellement des x et de

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - 1}. \tag{4}$$

Si le groupe ne contient pas de substitution infinitésimale, la discontinuité et l'existence des fonctions automorphes sont assurées dans le *domaine principal*

$$y_1 y_{1,0} + y_2 y_{2,0} + \ldots + y_n y_{n,0} - y_{n+1} y_{n+1,0} - y_{n+2} y_{n+2,0} < 0$$

ou, en revenant aux x,

$$|x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - 1| - (x_1, x_{1,0} + x_2, x_{2,0} + \ldots + x_n, x_{n,0} - 1) > 0; \tag{5}$$

ce domaine est plus vaste que (2). Comme dans ce domaine y_{n+2} ne

peut s'annuler, nous sommes certains que le radical (4) n'empêche pas les fonctions automorphes des z d'être fonctions *uniformes* des x. Si l'on envisageait le prolongement analytique hors de ce domaine, il faudrait, de chaque substitution semblable de (1), en faire deux de (3), en adjoignant successivement les équations

$$Y_{n+2} = y_{n+2}, \qquad Y_{n+2} = -y_{n+2}.$$

On vérifiera, à la suite de M. Picard, que les séries Θ formées à la manière de la Section I, convergent dans tout le domaine (5) pourvu seulement que la fonction rationnelle H soit bornée sur la multiplicité formée des points réels tels que

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1. \tag{6}$$

2. Si au lieu de (1) on avait pris la forme

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2 - y_n^2 - y_{n+1}^2, \tag{7}$$

avec deux carrés négatifs, on aurait eu un groupe (Γ) en posant encore

$$x_m = y_m : y_{n+1} \qquad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

On se ramène de nouveau au cas de la Section II en posant

$$y_{n+2}^2 = y_n^2 + y_{n+1}^2 - \sum_{m=1}^{n-1} y_m^2.$$

Le domaine principal sera donc

$$\left| \sum_{m=1}^{n-1} x_m^2 - x_n^2 - 1 \right| + \sum_{m=1}^{n-1} |x_m|^2 - |x_n|^2 - 1 < 0.$$

Comme y_{n+2} s'annule dans ce domaine, il sera nécessaire d'adjoindre à chaque substitution semblable de (7) successivement les équations

$$Y_{n+2} = y_{n+2}, \qquad Y_{n+2} = -y_{n+2}.$$

3. Si $n = 2$, les paragraphes 1 et 2 se confondent; nous sommes ramenés au cas hyperabélien. La discontinuité et l'existence de fonctions automorphes, quand il n'y a pas de substitutions infinitésimales,

sont assurées dans tout l'espace, sauf, en reprenant la notation du paragraphe 1, sur la multiplicité

$$|x_1^2 + x_2^2 - 1| - |x_1|^2 - |x_2|^2 + 1 = 0.$$

On verra que les séries Θ du paragraphe 1 convergent partout en dehors de cette multiplicité.

Le groupe d'origine arithmétique étudié par M. Picard dans son Mémoire cité est de cette nature.

4. Prenons la forme quinaire, du type de la Section II,

$$x_4 x_5 - x_2^2 + x_3^2 + x_3^2, \tag{8}$$

et considérons-en les substitutions semblables telles que l'on ait

$$X_1 = \lambda x_1, \qquad \lambda = \pm 1.$$

Alors, pour $x_1 = 0$, nous pouvons introduire les variables ξ, η telles que

$$\xi = \frac{x_2 + ix_3}{x_5}, \qquad \eta = \frac{x_2 - ix_3}{x_5}, \qquad \xi\eta = -\frac{x_4}{x_5}.$$

On constate alors, en imitant le raisonnement relatif aux groupes hyperabéliens, que l'on a des substitutions des deux types

$$\left(\xi, \eta; \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \quad \frac{a_0\eta + b_0}{c_0\eta + d_0}\right), \qquad \left(\xi, \eta; \frac{a\eta + b}{c\eta + d}, \quad \frac{a_0\xi + b_0}{c_0\xi + d_0}\right),$$

a, b, c, d étant quatre nombres complexes, a_0, b_0, c_0, d_0 leurs conjugués. Ces groupes ne satisfont pas aux hypothèses (II); cela n'a rien d'absurde, car, pour $x_1 = 0$, on ne peut pénétrer dans le domaine principal de la Section II.

Si en particulier ξ et η sont des variables imaginaires conjuguées, on obtient les groupes à une variable sans cercle principal.

5. Soit enfin la forme quinaire, du type de la Section II,

$$x_1 x_5 + x_2 x_4 + x_3^2; \tag{9}$$

considérons-en les substitutions semblables telles que l'on ait

$$X_2 = \lambda x_2.$$

Si $x_2 = 0$, nous pouvons introduire les variables ξ, η telles que

$$\xi = x_3 : x_1, \qquad \eta = x_4 : x_1, \qquad \xi\eta = -x_5 : x_1.$$

On constate alors que ξ et η subissent des substitutions du type

$$\left[\xi,\ \eta;\ \frac{a\xi + b}{\lambda(c\xi + d)},\ \frac{\eta + A\xi^2 + B\xi + C}{\lambda^2(c\xi + d)^2}\right] \quad (a, b, c, d, A, B, C \text{ réels}; ad - bc = 1).$$

Les hypothèses (H) ne sont pas satisfaites, même si l'on se borne au cas où $\lambda = \pm 1$; du reste, x_2 ne peut s'annuler dans le domaine principal de la Section II.

SUR LES SINGULARITÉS MOBILES DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET SUR LEUR INTÉGRALE GÉNÉRALE

PAR M. S. STOÏLOW.

Introduction.

La plupart des travaux consacrés aux équations linéaires aux dérivées partielles s'occupent d'équations de types particuliers, que l'on rencontre en Physique mathématique, ou ont pour but d'étudier les transformations des équations linéaires et d'établir des classifications.

A ma connaissance, c'est M. Le Roux qui, le premier, s'est occupé des intégrales des équations linéaires quelconques, cherchant à étudier leurs singularités et leurs propriétés analytiques (1).

Vers la même époque et dans un autre ordre d'idées, M. Delassus (2) s'est occupé des équations réelles à caractéristiques réelles établissant la forme des singularités appelées *accidentelles* ou *mobiles*, c'est-à-dire dépendant des fonctions initiales.

Dans ma *Thèse* (3), j'ai démontré une proposition qui rappelle les théorèmes d'existence de la théorie des équations aux dérivées partielles, où j'établis un lien entre les singularités des fonctions initiales

(1) LE ROUX, *Thèse*, Paris, 1895; *Journal de M. Jordan*, 1898, 1900.
(2) DELASSUS, *Annales de l'École Normale supérieure*, 1895.
(3) STOÏLOW, *Thèse*, Paris, 1916.

et la nature analytique des singularités correspondantes des intégrales.

Le présent Mémoire a d'abord pour but de donner une généralisation du théorème de ma Thèse, où les fonctions initiales avaient des singularités d'une nature analytique particulière. Les fonctions initiales seront ici absolument arbitraires, sous cette seule restriction d'être toutes holomorphes en un même point.

On reconnaîtra ainsi la forme analytique d'une intégrale au voisinage d'une singularité mobile quelconque.

Je donne ensuite une expression de l'intégrale générale (au sens aujourd'hui adopté) de l'équation linéaire générale à deux variables, valable dans un domaine assez petit, mais indépendant des fonctions arbitraires. Ce domaine ne contient aucune singularité fixe de l'équation, mais pourra contenir autant de singularités mobiles que l'on voudra, les fonctions arbitraires pouvant y être quelconques.

En particulier, on sera ainsi renseigné sur la forme analytique d'une intégrale au voisinage d'un point par lequel passent plusieurs multiplicités singulières mobiles.

L'expression de cette intégrale générale dépend, comme on le verra, d'un nombre fini ou infini de fonctions attachées à l'équation, selon que l'équation caractéristique a toutes ses racines simples ou possède des racines multiples.

En général, ces fonctions ne seront pas calculables, comme d'ailleurs cela est le cas dans presque toutes les méthodes d'intégration connues, dont le but principal n'est pas de fournir le moyen de calculer effectivement les intégrales, mais bien plutôt de donner une idée de leurs propriétés analytiques.

Je termine en indiquant comment cette méthode, qui consiste dans une analyse de la solution fournie par la méthode des approximations successives de M. Picard (méthode qui, d'ailleurs, a été employée également par MM. Le Roux et Delassus dans les Mémoires cités) conduit, dans le cas des équations dont toutes les familles caractéristiques sont simples, à l'expression de l'intégrale générale donnée par M. Le Roux.

Sous une forme un peu différente, l'énoncé du théorème concernant l'intégrale générale de l'équation linéaire que l'on trouvera ici

a été communiqué à l'Académie des Sciences dans la séance du 7 février 1916.

I. — Les termes de la première et de la seconde espèce.

1. Considérons une équation linéaire d'ordre n à deux variables indépendantes x et y, et d'ailleurs absolument quelconques. Dans tout ce qui suivra, les variables seront toujours complexes; il faudra donc toujours entendre par fonction quelconque une fonction analytique quelconque.

Dans l'espace à quatre dimensions des variables indépendantes x et y, envisageons une région qui ne contienne aucun des points des catégories suivantes :

1° Les points singuliers des coefficients;

2° Les points où tous les coefficients des dérivées d'ordre n sont nuls à la fois;

3° Les points singuliers des fonctions caractéristiques, c'est-à-dire des fonctions qui, égalées à une constante, donnent les caractéristiques de l'équation;

4° Les points où deux ou plusieurs caractéristiques sont tangentes *sans être confondues*.

Nous appellerons une pareille région *domaine de l'espace* (x, y), où il n'y a pas de singularités de l'équation. Nous le supposerons toujours limité et nous le désignerons par (D).

Dans un domaine (D), considérons un point qui n'est pas sur sa frontière et que nous pourrons toujours prendre pour origine.

Envisageons une caractéristique passant par ce point et supposons qu'elle corresponde à une racine d'ordre K de l'équation caractéristique algébrique en $\frac{dy}{dx}$. Ce sera une caractéristique *d'ordre k*.

En se bornant à un domaine (D) suffisamment petit, on pourra toujours supposer que la famille dont notre caractéristique fait partie a pour équation

$$x = \text{const.}.$$

la caractéristique même étant alors l'axe

$$x = 0.$$

Ceci étant, nous allons écrire l'équation linéaire considérée sous la forme

$$\Delta_n(u) = \Phi(u), \tag{I}$$

où $\Delta_n(u)$ est une expression que l'on peut écrire sous la forme symbolique

$$a_0(x,y)\left(\frac{\partial}{\partial x} + a_1(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x} + a_{n-k}(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial^k u}{\partial y^k};$$

et le second membre ne contenant que des dérivées d'ordre $n-1$ au plus.

L'équation

$$\Delta_n(u) = 0$$

admet évidemment, quelles que soient les fonctions $f_i(x)$,

$$\text{l'intégrale : } u_0 = \sum_{i=0}^{k-1} y^i f_i(x).$$

2. On peut déterminer une intégrale de (I) par les conditions initiales suivantes :

1° Sur $x = 0$, cette intégrale, ainsi que ses $n-k-1$ premières dérivées par rapport à x, se réduisent aux polynomes en y, qui représentent les valeurs de u_0 et de ses dérivées par rapport à x pour $x = 0$;

2° Pour $y = 0$, l'intégrale et ses $k-1$ premières dérivées par rapport à y se réduisent respectivement aux fonctions

$$f_0(x),\quad f_1(x),\quad \ldots,\quad f_{k-1}(x).$$

supposées toutes holomorphes à l'origine.

M. Goursat (¹) a démontré l'existence de l'intégrale satisfaisant à ces conditions par la méthode des fonctions majorantes.

Dans le cas des équations linéaires, on peut, pour cette démonstra-

(¹) Voir GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations du second ordre*, t. II, p. 303.

tion, employer la méthode des approximations successives, comme l'a fait M. Le Roux (¹).

Ce dernier procédé permet mieux de voir dans la nature de la solution calculée, et nous conduira même, comme on le verra, à la forme analytique de l'intégrale.

Je vais examiner d'abord quelles sont les formes des termes que les approximations successives introduisent.

En écrivant suivant la méthode bien connue de M. Picard :

$$\begin{aligned}
&\Delta_n(u_0) = 0,\\
&\Delta_n(u_1) = \Phi(u_0),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\Delta_n(u_{p+1}) = \Phi(u_p),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

on aura :

$$u_{p+1} = \int_0^{\cdot} dy \int_0^{\cdot} dy \dots \int_0^{\cdot} dy \int_{c_{n-k}} \Lambda_{n-k}\, dx \dots \int_{c_1} \Lambda_1 \Phi(u_p)\, dx,$$

les intégrales curvilignes étant prises le long des caractéristiques

$$c_0, \quad c_1, \quad \dots, \quad c_{n-k}$$

autres que les caractéristiques de la famille

$$x = \text{const.}$$

et à partir de $x = 0$.

Pour simplifier l'opération, nous allons déterminer successivement les intégrales correspondantes aux fonctions initiales

$$u_0 = f(x), \qquad u_0 = y f_1(x), \qquad \dots, \qquad u_0 = y^{k-1} f_{k-1}(x),$$

dont la somme donnera l'intégrale cherchée.

Nous poserons d'une façon générale

$$u_0 = \mathrm{P}(x, y) f(x),$$

la fonction $\mathrm{P}(x, y)$ étant supposée holomorphe dans (D).

En désignant par C_i la fonction de x et de y qui, égalée à une constante arbitraire, donne les familles caractéristiques $c_1, c_2, \dots, c_{n-k}$, on

(¹) *Journal de M. Jordan*, 1898.

pourra développer u_0 en série de la forme

$$u_0 = f(x)\sum_{i_1=0}^{\infty} Q_{i_1}(C_1)\,x^{i_1},$$

et l'on aura de la même façon

$$A_1 Q_{i_1}(C_1) = \sum_{i_2=0}^{\infty} Q_{i_1 i_2}(C_2)\,x^{i_2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A_{n-k-1} Q_{i_1 i_2 \dots i_{n-k-1}}(C_{n-k-1}) = \sum_{i_{n-k}=0}^{\infty} Q_{i_1 i_2 \dots i_{n-k}}(C_{n-k})\,x^{i_{n-k}},$$

toutes ces séries étant valables dans un domaine (d) défini par

$$(d) \qquad |x| < r, \qquad |y| < r,$$

où r est une quantité positive assez petite, et dans lequel ces séries sont d'ailleurs absolument et uniformément convergentes, ainsi que leurs séries dérivées.

On aura dans (d)

$$P(x,y)f(x) = \frac{f(x)}{A_1 A_2 \dots A_{n-k}} \sum_{i_1 i_2 \dots i_{n-k}}^{\infty} Q_{i_1 i_2 \dots i_{n-k}}(C_{n-k})\,x^{i_1+i_2+\dots+i_{n-k}},$$

où d'ailleurs l'on supposera qu'aucune des fonctions A_i (qui ne dépendent toutes que de l'équation proposée) ne s'annule. Nous appellerons dans la suite une série de cette nature *développement normal de*

$$P(x,y)f(x).$$

Il est évident que, dans un développement normal d'une pareille fonction, les Q sont indépendants de $f(x)$,

Ceci étant, on aura évidemment

$$(1) \qquad u_1 = \sum_{m=0}^{n-1} \int_0^x dy \dots \int_0^x dy \sum_{i_1 i_2 \dots i_{n-k}}^{\infty} Q^m_{i_1 i_2 \dots i_{n-k}}(C_{n-k}) \times \int_0^x x^{i_{n-k}}\,dx \int_0^x x^{i_{n-k-1}}dx \dots \int_0^x x^{i_1} f^m(x)\,dx.$$

en désignant, pour simplifier l'écriture, par $f^{m}(x)$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x)$.

Si $P_m(x, y)$ désigne le coefficient de $f^m(x)$ dans $\Phi(u_1)$, les $Q^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}$ figura dans cette expression sont les coefficients du développement normal de

$$P_m(x, y) f^m(x).$$

Faisons tout de suite une remarque qui nous sera utile plus tard.

Si

$$M^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}$$

désignent les limites supérieures des valeurs absolues de

$$\frac{1}{A_1 A_2 \ldots A_{n-k}} Q^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(C_{n-k}) x^{i_1+i_2+\ldots+i_{n-k}},$$

dans (d), on peut évidemment choisir ces quantités positives de façon que la série

$$\sum_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}=0}^{\infty} M^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}$$

soit convergente. Soit alors

$$\mathfrak{M}^m$$

sa somme. Nous appellerons cette quantité *limite supérieure normale* de $P_m(x, y)$; si M^m désigne une limite supérieure quelconque de $f^m(x)$, la *limite supérieure normale de*

$$P_m(x, y) f^m(x)$$

sera, par définition, la quantité

$$\mathfrak{M}^m M^m.$$

3. Voyons maintenant quelles espèces de termes introduira dans $\Phi(u)$ la substitution $u = u_1$, u_1 étant donné par (1).

Il est aisé de voir que l'on a toujours

$$\int_0^x \alpha^{i_{n-k}} d\alpha \int_0^\alpha \alpha^{i_{n-k}} d\alpha \ldots \int_0^\alpha \alpha^{i_1} f^m(\alpha)\, d\alpha = \int_0^x S^m_{i_1 \ldots i_{n-k}}(x, \alpha) f^m(\alpha)\, d\alpha,$$

où $S^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}$ est un polynome facile à calculer.

Tout terme de (1) pourra donc se mettre sous la forme

$$\int_0^x \mathrm{R}^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(x, y, \alpha) f^m(\alpha)\, d\alpha,$$

où l'on a

$$\mathrm{R}^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(x, y, \alpha) = \mathrm{S}^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(x, \alpha) \int_0^y dy \ldots \int_0^y \mathrm{Q}^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(\mathrm{C}_{n-k})\, dy,$$

les signes $\int_0^x$ étant comme dans (1) au nombre de k. On voit donc immédiatement que :

1° Les fonctions

$$\mathrm{R}^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(x, y, \alpha)$$

sont nulles ainsi que leurs premières $n - k - 2$ dérivées par rapport à x pour $x = \alpha$.

2° La série

$$\sum_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}=0}^{\infty} \mathrm{R}^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(x, y, \alpha)$$

est absolument et uniformément convergente si $|x|, |y|, |\alpha|$ sont assez petits.

Soit $\mathrm{R}^m_1(x, y, \alpha)$ la somme de cette série.

Cette somme possède naturellement la propriété 1° de chacun de ses termes.

On aura par conséquent, dans $\Phi(u_1)$, des termes des deux types suivants :

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathrm{R}^m_1(x, y) f^m(x). \\ \displaystyle\int_0^x \mathrm{R}^m_1(x, y, \alpha) f^{m(\alpha)}\, d\alpha, \end{cases}$$

où les R sont des fonctions dont la forme ne dépend que de $\mathrm{P}(x, y)$ et de l'équation proposée.

De plus, la propriété 1° de $\mathrm{R}^m_1(x, y, \alpha)$ montre que :

Si $k = 1$, le nombre entier positif m dans les expressions (2), figurant dans $\Phi(u_1)$, ne dépasse jamais le nombre $n - 1$.

Si $k > 1$, ce nombre $m > n - 1$.

Ces deux faits sont très importants pour la suite; nous ferons

remarquer que ce sont des conséquences des propriétés des fonctions $R^m_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}(x, y, \alpha)$.

4. Pour avoir maintenant les formes des termes de u_2, il faudra considérer à la place de (1) les expressions analogues provenant de

$$(3) \qquad \int_0^y dy \dots \int_0^y dy \int_{C_{n-k}} A_{n-k}\, dx \dots \int_{C_1} A_1 R^m_1(x, y) f^m(x)\, dx$$

et de

$$(4) \qquad \int_0^x dy \dots \int_0^x dy \int_{C_{n-k}} A_{n-k}\, dx \dots \int_{C_1} A_1\, dx \int_0^x R^m_1(x, y, \alpha) f^m(\alpha)\, d\alpha.$$

Pour ce qui est des expressions (3), elles rentrent dans l'étude faite au paragraphe précédent. Elles donneront dans u_2 une somme finie d'expressions de la forme

$$\int_0^x R^m_2(x, y, \alpha) f^m(\alpha)\, d\alpha,$$

où les R^m_2 sont des fonctions différentes des R^m_1, mais ne dépendant toujours que de $P(x, y)$ et de l'équation proposée et possédant les mêmes propriétés 1° et 2°.

En ce qui concerne les expressions de la forme (4), nous ferons d'abord remarquer que, si l'on pose

$$R^m_1(x, y, \alpha) = R^m_{10}(x, y) + R^m_{11}(x, y)\alpha + R^m_{12}(x, y)\alpha^2 + \dots,$$

ces expressions deviennent des séries uniformément et absolument convergentes d'expressions de la forme (3) où, à la place de $f^m(x)$, on aurait

$$\int_0^x \alpha^{i_0} f^m(\alpha)\, d\alpha,$$

i_0 étant un entier positif quelconque ou nul.

J'appellerai donc *développement normal d'un terme*

$$\int_0^x R^m_1(x, y, \alpha) f^m(\alpha)\, d\alpha$$

la série

$$\sum_{i_0=1}^{\infty} \mathrm{R}_{1\,i_0}^{m}(x,\,y)\int_0^x \alpha^{i_0} f^m(\alpha)\,d\alpha,$$

où toutes les fonctions $\mathrm{R}_{1\,i_0}^{m}$ sont développées en séries normales (*voir* n° 2).

On aura alors, pour les termes de u_2 provenant de (4),

$$\sum_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}=0}^{\infty} \int_0^y dy \ldots \int_0^y dy\, \mathrm{Q}_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}^{m}(\mathrm{C}_{n-k}) \int_0^x x^{i_{n-k}}\,dx \ldots$$
$$\times \int_0^x x^{i_1}\,dx \int_0^x x^{i_0} f^m(x)\,dx.$$

Comme plus haut, on aura ici des fonctions

$$\mathrm{R}_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}^{m}(x, y, \alpha),$$

mais dépendant de $n-k+1$ indices, pour lesquelles on aura les propriétés suivantes :

1° Pour $x=\alpha$, ces fonctions, ainsi que leurs $n-k-1$ premières dérivées par rapport à x, sont nulles;

2° La série

$$\sum_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}=0}^{\infty} \mathrm{R}_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}^{m}(x, y, \alpha)$$

est absolument et uniformément convergente pour $|x|$, $|y|$ et $|\alpha|$ assez petits.

Nous appellerons de même *limite supérieure normale d'un terme de la forme*

$$\int_0^x \mathrm{R}_1^m(x, y, \alpha) f^m(\alpha)\,d\alpha$$

la somme de la série

$$|x|\,\mathrm{M}^m \sum_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}=0}^{\infty} \mathrm{M}_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}^{m} = x\,\mathrm{M}^m\,\mathfrak{M}_0^m,$$

où chaque terme représente une limite supérieure de

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_{k-k}} |x| Q^m_{i_0 i_1 i_2 \dots i_{n-k}} (C_{n-k}) x^{i_0+i_1+i_2+\dots+i_{n-k}} f^m(x),$$

convenablement choisie pour que la série soit convergente.

En se rappelant la propriété 2° de fonctions $R^m_{i_0 i_1 i_2 \dots i_{n-k}}$, on pourra conclure de tout ce qui précède :

Quel que soit le rang p, les expressions obtenues pour $\Phi(u_p)$, *par le procédé indiqué, ne contiendront jamais qu'un nombre fini (qui d'ailleurs varie avec p) de termes des types* (2).

J'appellerai *termes de la première espèce* ceux de la forme

$$R(x, y) f^m(x),$$

et *termes de la seconde espèce* ceux de la forme

$$\int_0^x R(x, y, \alpha) f^m(\alpha)\, d\alpha,$$

quels que soient le nombre m et les fonctions R.

Comme aux paragraphes précédents, on déduira immédiatement de la propriété 1° des fonctions

$$R^m_{i_1 i_2 \dots i_{n-k}} \quad \text{et} \quad R^m_{i_0 i_1 i_2 \dots i_{n-k}},$$

Si $k = 1$, *quel que soit le rang p, le nombre positif m* (indiquant l'ordre de dérivation de $f(x)$), *dans les termes de première et de seconde espèce de* $\Phi(u_p)$ *ne dépassera jamais le nombre* $n - 1$.

Si $k > 1$, *ce nombre m croît indéfiniment avec p*. Enfin, on peut ajouter que :

Si $k = 1$, *les expressions de* $\Phi(u_p)$ *ne contiendront jamais que des termes de la première espèce*. En effet, dans ce cas particulier, on n'aura dans l'expression de u_p aucune intégration par rapport à α.

II. — Sur la convergence des approximations successives. Les intégrales U_c.

5. D'après ce qui a été dit jusqu'ici, toute expression $\Phi(u_p)$, quel que soit p, peut se mettre sous la forme d'une somme finie de termes

de la première et de la seconde espèce. Soit μ le nombre des termes de la première espèce et ν le nombre des termes de la seconde espèce que contient $\Phi(u_p)$. On aura

$$\Phi(u_p) = \sum_{m=0}^{\mu} P_{mp}(x, y) f^m(x) + \sum_{m=0}^{\nu} \int_0^x R_{mp}(x, y, \alpha) f^m(\alpha)\, d\alpha,$$

où μ et ν peuvent dépendre de p.

Avec les notations de la section précédente, on pourra écrire les developpements normaux

$$P_{mp}(x, y) f^m(x) = \frac{f^m(x)}{A_1 A_2 \dots A_{n-k}} \sum_{i_0 i_1 i_2 \dots i_{n-k}=0}^{\infty} Q^{mp}_{i_0 i_1 i_2 \dots i_{n-k}}(C_{n-k})\, x^{i_1+i_2+\dots+i_{n-k}}$$

et

$$R_{mp}(x, y, \alpha) f^m(\alpha) = \frac{f^m(\alpha)}{A_1 A_2 \dots A_{n-k}} \sum_{i_0 i_1 i_2 \dots i_{n-k}=0}^{\infty} Q^{mp}_{i_0 i_1 i_2 \dots i_{n-k}}(C_{n-k})\, x^{i_1+i_2+\dots+i_{n-k}} \alpha^{i_0}.$$

Considérons maintenant les limites supérieures normales de P_{mp} et de R_{mp}, soient

$$\partial\mathfrak{R}^{mp} \quad \text{et} \quad \partial\mathfrak{R}_0^{mp}.$$

et posons

$$\partial\mathfrak{R} = \sum_{m=0}^{\mu} \partial\mathfrak{R}^{mp} \qquad \text{et} \qquad \partial\mathfrak{R}_0 = \sum_{m=0}^{\nu} \partial\mathfrak{R}_0^{mp}.$$

Dans un domaine (d') intérieur à (d), on aura pour *limite supérieure normale de* $\Phi(u_p)$ l'expression

$$\lambda_p M \left| \partial\mathfrak{R} + |x| \partial\mathfrak{R}_0 \right|,$$

où $M > |f(x)|$ dans (d) et λ_p est une quantité ne dépendant que de (d'), (d) et du rang p choisi.

D'après ce qui a été dit dans la section précédente, on aura pour u_{p+1} une expression qui pourra s'écrire sous la forme d'une somme finie de séries telles que

$$(5) \qquad \sum_{i_0 i_1 \dots i_{n-k}} \int_0^y dy \dots \int_0^y dy\, Q^m_{i_0 i_1 \dots i_{n-k}}(C_{n-k}) \int_0^x x^{i_0+\dots+i_{n-k}}\, dx \dots \int_0^x x^{i_1} f^m(x)\, dx$$

et

$$(5') \quad \sum_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}^{\infty} \int_0^y dy \ldots \int_0^y dy\, Q^m_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(C_{n-k}) \int_0^x x^{i_0 - k} dx \ldots \int_0^x x^{i_0} f^m(x)\, dx.$$

Chacun des termes des séries (5) et (5′) peut se mettre sous la forme

$$\int_0^x R^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(x, y, \alpha) f^m(\alpha)\, d\alpha$$

et la forme

$$\int_0^x R^m_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(x, y, \alpha) f^m(\alpha)\, d\alpha.$$

Ces fonctions (R) sont, dans (d'), limitées supérieurement par l'expression

$$|x|^{n-k-1} |y|^k [M^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}} + |x| M^m_{i_0 i_1 i_1 \ldots i^{n-k}}],$$

et les termes de (5) et (5′) eux-mêmes sont limités par

$$\lambda_p |x|^{n-k} |y|^k M [M^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}} + |x| M^m_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}].$$

On n'aura qu'à multiplier ces limites par

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{|x|}{r}\right)\left(1 - \frac{|y|}{r}\right)}$$

pour avoir des majorantes des R et des termes des séries (5) et (5′), dans (d').

D'autre part, chaque terme de ces séries donne, par sa substitution dans

$$\Phi(u),$$

un nombre de termes au plus égal à n, dont chacun, à cause de la forme des majorantes des R, est limité supérieurement par l'expression

$$\rho \lambda N \lambda_p M [M^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}} + \rho M^m_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}],$$

où ρ désigne le plus grand des modules $|x|$ et $|y|$, λ une quantité ne dépendant que de (d'), de (d) et de l'équation proposée, et N une limite supérieure des coefficients de $\Phi(u)$ dans (d').

Si donc on désigne par λ une autre quantité ne dépendant toujours que des domaines (d') et (d) et de l'équation proposée, on aura dans (d'), pour

$$\Phi(u_{p+1}),$$

la limite supérieure *normale*

$$\rho\lambda N\lambda_p M[\partial\mathfrak{M} + \rho\partial\mathfrak{M}_0].$$

Ceci étant, il est aisé de voir que la limite supérieure normale de

$$\Phi(u_{p+s}),$$

où s est un entier positif quelconque, est donnée par l'expression

$$(\rho\lambda N)^s\lambda_p M[\partial\mathfrak{M} + \rho\partial\mathfrak{M}_0].$$

Si donc le nombre positif ρ est assez petit pour satisfaire à l'inégalité

$$\rho\lambda N < 1,$$

la série de termes de première et de seconde espèce, représentée par

$$\sum_{p=0}^{\infty}\Phi(u_p),$$

est absolument et uniformément convergente dans un domaine $|\delta|$, défini par

$$|x| < \rho, \qquad |y| < \rho,$$

qui, comme on le voit, ne dépend en aucune façon de la fonction $f(x)$.

Dans ce même domaine, la série

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{m=\nu_p} R_{mp}(x, y, \alpha)$$

est aussi absolument et uniformément convergente.

Il résulte de ce que l'on vient de dire que l'on peut changer l'ordre des termes dans

$$\sum_{p=0}^{\infty}\Phi(u_p)$$

et grouper ces termes sous un même signe $\int_0^{\omega}$, comme on le voudra.

Si l'on tient compte de ce que l'intégrale cherchée est représentée par

$$U=\sum_{p=0}^{\infty} u_p,$$

et que l'on se rappelle ce qui a été dit au n° 3, on aura, suivant que $k=1$ ou que $k>1$:

$$(II)\quad \begin{cases} \Delta_n(U)=\sum_{i=0}^{n-1}\left[A_i(x,y)f^i(x)+\int_0^x B_i(x,y,\alpha)f^i(\alpha)\,d\alpha\right], \\ \Delta_n(U)=\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{\infty}\left[A_{ij}(x,y)f_j^i(x)+\int_0^x B_{ij}(x,y,\alpha)f_j^i(\alpha)\,d\alpha\right]. \end{cases}$$

Dans le cas particulier où $k=n$, on aurait identiquement

$$B_{ij}(x,y,\alpha)\equiv 0,$$

quels que soient i et j.

6. Pour avoir maintenant l'intégrale U, il faudra intégrer (II) avec les fonctions initiales

$$f_j(x) \qquad (j=0,1,2,\ldots,k-1)$$

sur $y=0$, et

$$f_0^i(0)+yf_1^i(0)+\ldots+y^{k-1}f_{k-1}^i(0) \qquad (i=0,1,2,\ldots,n-k-1)$$

sur $x=0$.

Si l'on pose

$$U=u_0+Z,$$

on aura à déterminer une intégrale Z de (II) avec les fonctions initiales nulles sur $x=0$ et $y=0$. On aura donc :

$$(III)\quad \begin{cases} U=f(x)+y\sum_{i=0}^{n-1}\int_0^x V_i(x,y,\alpha)f^i(\alpha)\,d\alpha & (k=1), \\ U=\sum_{j=0}^{k-1}y^jf_j(x)+y^k\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{\infty}\int_0^x V_{ij}(x,y,\alpha)f_j^i(\alpha)\,d\alpha & (k>1), \\ U=\sum_{j=0}^{n-1}y^jf_j(x)+y^n\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{\infty}Y_{ij}(x,y)f_j^i(x) & (k=n), \end{cases}$$

Dans toutes ces expressions, les fonctions V ne dépendent que de l'équation proposée et en aucune façon des $f(x)$.

Ces expressions sont toutes valables dans un domaine (δ) également indépendant des fonctions arbitraires $f(x)$ qui sont assujetties seulement à être holomorphes dans ce domaine. Cette dernière hypothèse peut être levée.

7. On peut déterminer un domaine (δ) assez petit pour que les expressions (III) y soient valables, c'est-à-dire que les séries convergent dans ce (δ), *quelles que soient les fonctions* $f(x)$ dans ce domaine, pourvu que l'origine soit pour elles un point ordinaire de façon que les intégrales aient un sens bien déterminé. C'est ce que nous allons montrer.

Considérons, pour cela, un cercle Γ situé dans le plan des x et ayant l'origine pour centre, et supposons que les $f(x)$ aient des singularités absolument quelconques dans Γ, à condition d'être holomorphes à l'origine, et cela quelle que soit la branche de ces fonctions si elles sont multiformes.

Ceci étant, envisageons les chemins L, satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Ces chemins partent de l'origine et aboutissent en un point quelconque de Γ, où les $f(x)$ sont holomorphes, et restent entièrement situés dans Γ entre ces deux extrémités;

2° Ils ne passent par aucune singularité de Γ;

3° Entre l'origine et un point déterminé de Γ, le chemin L correspondant est le plus court de tous ceux qui satisfont aux conditions 1° et 2°.

Soit l la limite supérieure des longueurs de tous les chemins L ainsi définis. Si (δ) est assez petit pour que l'on ait dans ce domaine

$$l < \rho,$$

on voit que tout ce qui a été dit pour le domaine (δ) primitif, où les $f(x)$ étaient holomorphes, peut être répété pour ce nouveau domaine (δ), qui est toujours indépendant des fonctions $f(x)$, et dans lequel ces fonctions peuvent avoir des singularités.

On peut donc prendre dans (III) *des fonctions* $f_j(x)$ *arbitraires, pourvu que l'origine ne soit pas un point singulier pour ces fonctions.*

Les expressions (III) représentent donc aussi des intégrales non holomorphes dans (δ).

8. Il est clair que l'intégrale (U) définie plus haut, qui dépend d'un nombre de fonctions arbitraires égal à l'ordre de la famille caractéristique

$$x = \text{const.},$$

n'est pas la seule que l'on puisse obtenir ainsi.

Une famille caractéristique quelconque peut être ramenée par un changement de variables à la forme ci-dessus, et une caractéristique quelconque à l'axe $x = 0$.

Il y aura donc des intégrales telles que U relatives à une caractéristique quelconque. Si c désigne cette caractéristique, nous désignerons l'intégrale analogue à U lui correspondant, par

$$U_c.$$

Cette intégrale, par définition, dépend donc d'un nombre de fonctions d'une variable, égal à l'ordre de la caractéristique c.

On peut donner des intégrales U_c la définition suivante : ce sont les intégrales qui possèdent cette propriété que leurs valeurs, ainsi que celles de leurs premières $n - k - 1$ dérivées extérieures à c, sur cette caractéristique, sont données par des polynomes d'une variable de degré $k - 1$ au plus, et qu'elles sont holomorphes en un point de c.

9. Passons maintenant à un ordre d'idées un peu différent et essayons de représenter analytiquement des intégrales déterminées avec d'autres fonctions initiales.

J'ai démontré dans ma *Thèse* (Paris, 1916) que, si l'on se donnait sur une caractéristique d'ordre K, soit

$$C(x, y) = 0,$$

supposée passer par l'origine et satisfaire dans un domaine (D) autour

de l'origine à l'inégalité

$$\frac{\partial C}{\partial x} \neq 0,$$

un nombre $n-k$ de fonctions initiales toutes holomorphes dans la région de cette caractéristique définie par :

$$|y| < h \cdot \quad \text{(région à un seul tenant)},$$

et sur la droite $y = 0$, un nombre K de fonctions initiales toutes holomorphes dans la région de cette droite, où

$$|x| < \varepsilon$$

et où ξ est *assez petit par rapport à* h, on peut déterminer un domaine (d) de l'espace (xy) contenant entièrement ces deux régions et dans lequel l'intégrale qui correspond à ces fonctions initiales est holomorphe. Ce domaine (d) est indépendant des données. (Voir *Thèse*, p. 45, lemme I.)

Si nous revenons maintenant aux intégrales U_c, il est facile de généraliser un théorème que j'ai donné dans ma *Thèse* (p. 44) et qui établit un lien entre les singularités des fonctions initiales et la nature analytique des singularités des intégrales correspondantes.

Considérons, en effet, le domaine (d) du lemme que je viens de rappeler, et appelons (γ) et (γ') les régions de la caractéristique et de $y = 0$ où les données sont holomorphes et qui contiennent l'origine.

Déterminons une intégrale avec $n-k$ fonctions initiales holomorphes dans (γ) et K fonctions initiales quelconques dans (γ') holomorphes à l'origine seulement.

Soit u cette intégrale. On pourra déterminer une intégrale du type U_c, où c est la caractéristique

$$C(x, y) = 0,$$

et ayant sur $y = 0$ les mêmes fonctions initiales que u. La différence

$$u - U_c$$

sera, d'après le lemme rappelé holomorphe dans le domaine (d) de ce

lemme. D'autre part, U_c sera représenté par (III), dans un domaine (δ) indépendant des données.

On peut donc énoncer la généralisation suivante du théorème de ma *Thèse* (p. 44) :

Toute intégrale déterminée avec des fonctions initiales holomorphes dans (γ) *et quelconque dans* (γ'), *qui est seulement suffisamment petit par rapport à* (γ), *est représentable dans un domaine* (δ) *contenant entièrement* (γ') *et indépendant des fonctions initiales par*

$$U_c + H,$$

où H *désigne une fonction holomorphe dans tout* (δ), *et les arbitraires de* U_c *sont les fonctions initiales sur* (γ').

Dans le cas particulier où $k = n$, l'intégrale U_c représente l'intégrale générale; on voit sur l'expression (III) de cette intégrale qu'il y a alors une infinité de solutions uniformes autour d'une singularité mobile, ce qui n'a pas lieu dans le cas général, et ce qui a été démontré directement dans ma *Thèse* (p. 39) par une autre voie.

III. — Sur certains systèmes d'équations fonctionnelles et sur l'intégrale générale des équations linéaires à deux variables indépendantes.

10. Considérons une expression fonctionnelle de la forme

$$\psi_n = \sum_{i=0}^{n} a_i(x, y) f_i[b_i(x, y)],$$

où les fonctions a_i et b_i sont données et les f_i représentent des fonctions arbitraires d'une variable.

Nous supposerons que, dans un domaine contenant l'origine des axes des coordonnées, les fonctions a_i et b_i sont holomorphes et que l'on n'a en aucun point de ce domaine l'égalité

$$\frac{\partial b_i}{\partial y} = 0.$$

Considérons n fonctions de y :

$$\varphi_0(y), \quad \varphi_1(y), \quad \ldots, \quad \varphi_n(y)$$

assujetties à la seule condition d'être holomorphes à l'origine, et proposons-nous de déterminer les fonctions f_i de telle façon que l'on ait les égalités suivantes pour $x = 0$:

$$(6)\qquad \begin{cases} \varphi_0(y) = (\psi_n)_0, \\ \varphi_1(y) = \left(\dfrac{\partial \psi_n}{\partial x}\right)_0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \varphi_n(y) = \left(\dfrac{\partial^n \psi_n}{\partial x^n}\right)_0, \end{cases}$$

où $(\psi_n)_0$, $\left(\dfrac{\partial \psi_n}{\partial x}\right)_0$, etc., désignent les valeurs de ψ_n, $\dfrac{\partial \psi_n}{\partial x}$, etc., pour $x = 0$.

Nous allons faire voir que le système (6) peut être réduit à un système différentiel linéaire à $n + 1$ inconnues et d'ordre n.

Convenons pour cela de désigner par

$$f_i^{(r)}[b_i(x, y)]$$

la dérivée de $f_i[b_i(x,y)]$ prise par rapport à $b_i(x,y)$, cette fonction étant considérée comme variable indépendante.

Considérons la fonction

$$\frac{\partial^n \psi_n}{\partial x^n}$$

et ajoutons et retranchons de cette fonction la même fonction

$$\sum_{i=0}^{n} \left\{ \frac{a_i(x, y)\left[\dfrac{\partial^n f_i}{\partial x^n} - f_i^{n}\left(\dfrac{\partial b_i}{\partial x}\right)^n\right]}{\left(\dfrac{\partial b_i}{\partial y}\right)^n} \right\},$$

dont le dénominateur ne s'annule pas, d'après l'hypothèse faite sur $\dfrac{\partial b_i}{\partial y}$, dans un domaine contenant l'origine.

Ceci étant, posons

$$\left(\frac{\partial b_i}{\partial y}\right)^n A_i(x, y) = a_i(x, y)\left(\frac{\partial b_i}{\partial x}\right)^n,$$

les $A_i(x,y)$ étant des nouvelles fonctions indépendantes des f_i et naturellement holomorphes à l'origine.

Il est, dès lors, facile de voir que si l'on fait dans l'expression de $\frac{\partial^n \psi_n}{\partial x^n}$, ainsi écrite $x = 0$, la dernière équation de (6) ne contiendra plus de dérivée

$$f_i^n[b_i(0, y)],$$

mais des dérivées

$$\left(\frac{\partial^n f_i}{\partial y^n}\right)_0.$$

On pourra recommencer la même opération pour les dérivées

$$f_i^{n-1}[b_i(0, y)],$$

et l'on finira par réduire, dans toutes les équations du système (6), les dérivées $(f_i^p)_0$ à des dérivées $\left(\frac{\partial^p f_i}{\partial y^p}\right)_0$.

Ce système sera donc transformé en un système linéaire différentiel ordinaire où les inconnues seront

$$f_0[b_0, (0, y)], \quad f_1[b_1(0, y)], \quad \ldots, \quad f_n[b_n(0, y)],$$

où les seconds membres seront linéaires et homogènes par rapport à ces fonctions et leurs dérivées, et les coefficients de ces seconds membres holomorphes à l'origine. L'ordre du système est évidemment n.

Le problème posé au début de ce paragraphe a donc, comme on voit, une infinité de solutions, quel que soit $n \geq 1$.

L'intégrale générale du système différentiel correspondant à (6), et par conséquent la solution générale du système fonctionnel (6), dépendra (comme il est facile de le voir par un simple calcul des dérivées) *linéairement* des n^2 constantes représentant les valeurs des inconnues et de leurs premières $n - 1$ dérivées pour $y = 0$.

Ces constantes ne seront d'ailleurs pas tout à fait arbitraires, devant satisfaire aux premières $n - 1$ équations du système différentiel transformé de (6).

11. Tout ce qui vient d'être dit suppose évidemment que les $n + 1$ fonctions $\varphi_0(y), \varphi_1(y), \ldots, \varphi_n(y)$, sont *données*. Si l'on prend pour ces fonctions des fonctions arbitraires holomorphes à l'origine, il est évident, d'après la forme des équations différentielles

du système (G) transformé, que la solution générale dépendra encore *linéairement* des constantes en nombre infini :

$$\varphi_0(0),\quad \varphi_1(0),\quad \ldots,\quad \varphi_n(0),\quad \varphi_0'(0),\quad \varphi_1'(0),\quad \ldots$$

qui déterminent les φ.

Soit alors M une limite supérieure du module de tous les φ, dans un domaine contenant l'origine défini par

$$|x|<r,\qquad |y|<r.$$

On aura dans tout domaine (δ) intérieur à ce domaine la majorante

$$\frac{M}{1-\frac{y}{r}}$$

pour les fonctions φ, et par conséquent dans tout (δ) l'inégalité

$$|f_i|<\lambda M, \tag{7}$$

où λ désigne une quantité dépendant seulement des $a_i(x,y)$ et $b_i(x,y)$, et nullement des φ, à la condition que l'on choisisse convenablement les n^2 constantes représentant les valeurs des $(f_i)_0$ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$, pour $y=0$.

En effet, on n'aurait qu'à prendre, par exemple,

$$\begin{gathered}(f_0)_0=\qquad (f_1)_0=\ldots=\qquad (f_{n-1})_0=0,\\ \left(\frac{\partial f_0}{\partial y}\right)_0=\quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_0=\ldots=\quad \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y}\right)_0=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \left(\frac{\partial^{n-1} f_0}{\partial y^{n-1}}\right)_0=\left(\frac{\partial^{n-1} f_1}{\partial y^{n-1}}\right)_0=\ldots=\left(\frac{\partial^{n-1} f_{n-1}}{\partial y^{n-1}}\right)_0=0\end{gathered}$$

pour $y=0$.

Les constantes représentant

$$(f_n)_0,\quad \left(\frac{\partial f_n}{\partial y}\right)_0,\quad \ldots,\quad \left(\frac{\partial^{n-1} f_n}{\partial y^{n-1}}\right)_0$$

pour $y=0$ figureraient alors seules dans l'expression générale de la solution de (6), et l'inégalité (7) aurait naturellement lieu pour ces constantes, donc pour les solutions de (6) ainsi choisies.

Nous appelons ces solutions de (6) *solutions normales*.

12. Nous allons maintenant appliquer ces considérations à la détermination de l'intégrale générale de l'équation (I), qui est l'équation linéaire générale à deux variables.

Reprenons pour cela les expressions (III) (*voir* n° 7) des intégrales U_c, définies dans la section précédente, et posons, pour abréger,

$$U_c = T_c + S_c,$$

où T_c désigne la somme des termes de première espèce et S_c la somme des termes de seconde espèce figurant dans l'expression (III) de U_c.

Considérons alors les équations

$$(a)\quad \sum_c (T_c)_0 = \varphi_0(y), \quad \sum_c \left(\frac{\partial I_c}{\partial x}\right)_0 = \varphi_1(y), \quad \ldots, \quad \sum_c \left(\frac{\partial^{n-1} T}{\partial x^{n-1}}\right)_0 = \varphi_{n-1}(y),$$

où l'indice inférieur o indique, comme plus haut, qu'après les dérivations on a fait $x = 0$.

D'après ce qui a été démontré, il existe des fonctions $f_i(c)$ satisfaisant au système (a). Nous considérerons les *solutions normales* de ce système, et nous les substituerons dans

$$S_c, \quad \frac{\partial S_c}{\partial x}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-1} S_c}{\partial x^{n-1}}.$$

Nous écrirons alors le système

$$(b)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_c (T_c)_0 = \sum_c (S_c)_0, & \displaystyle\sum_c \left(\frac{\partial T_c}{\partial x}\right)_0 = \sum_c \left(\frac{\partial S_c}{\partial x}\right)_0, & \ldots, \\ & \displaystyle\sum_c \left(\frac{\partial^{n-1} T_c}{\partial x^{n-1}}\right)_0 = \left(\frac{\partial^{n-1} S_c}{\partial x^{n-1}}\right)_0, \end{cases}$$

dont nous pourrons encore déterminer un système de solutions normales.

On substituera ces solutions de (b) dans les seconds membres d'un système (c) tout pareil à (b). C'est la méthode des approximations successives de M. Picard appliquées aux expressions de la forme

$$T_c + S_c.$$

La proposition du n° 11 montre que l'on a, pour les solutions

de (a),

$$|f| < \lambda M,$$

où M est une limite supérieure des $\varphi(y)$ dans le domaine (δ) où les U_i ont les expressions (III).

On aura donc, pour limite supérieure des modules des seconds membres de (b),

$$\rho\mu\lambda M,$$

où μ comme λ désignent des quantités numériques dépendant seulement de l'équation proposée (1) et du domaine (δ), et ρ le plus grand des modules $[x]$ et $[y]$.

On aura donc, pour les solutions du système (b), la limite supérieure

$$\rho\mu\lambda^2 M,$$

et pour les seconds membres de (c)

$$\rho^2\mu^2\lambda^2 M,$$

et ainsi de suite. On aura donc en général pour le système de rang p la limite supérieure

$$\rho^{p-1}\mu^{p-1}\lambda^{p-1}M$$

pour le second membre, et

$$\rho^{p-1}\mu^{p-1}\lambda^{p}M$$

pour les solutions normales.

Si donc ρ est assez petit pour que

$$\rho\mu\lambda < 1,$$

les solutions normales des systèmes (a), (b), (c), etc. forment une série convergeant absolument et uniformément dans un domaine assez petit autour de l'origine.

Les n fonctions f qui sont les sommes de ces n séries auront la propriété suivante, immédiatement reconnaissable sur la chaîne des systèmes d'approximations successives.

Si l'on remplace dans

$$U_i = T_i + S_i$$

les fonctions arbitraires par ces f, et que l'on fasse ensuite la somme

$$\sum_c U_c,$$

étendue à toutes les caractéristiques passant par l'origine, on obtient une intégrale qui, sur $x = 0$, prend, aussi bien que ses $n - 1$ premières dérivées par rapport à x des valeurs données à l'avance,

$$\varphi_0(y), \quad \varphi_1(y), \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1}(y),$$

arbitrairement choisies, mais holomorphes à l'origine.

D'où le théorème général suivant :

Toutes les intégrales d'une équation linéaire à deux variables indépendantes, holomorphes en un point O, *sont comprises dans l'expression*

$$\sum_c U_c,$$

relative aux caractéristiques passant par O *et valable dans un domaine fixe* (δ) *contenant ce point.*

13. L'intégration d'une équation linéaire quelconque à deux variables dépend donc ainsi de la connaissance des fonctions appelées plus haut V_i qui dépendent de la nature de l'équation, et que d'ailleurs en général on ne peut calculer effectivement.

Il existe un cas particulier, bien connu d'ailleurs et qui a été tout particulièrement étudié par M. Appell (*Journal de M. Jordan*, 1892), où les fonctions *intégrantes* V_i sont faciles à calculer.

C'est le cas de l'équation de la théorie de la chaleur

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

où l'on a l'intégrale générale

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{i!} f_0^i(y) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{(i+1)!} f_1^i(y).$$

C'est, comme on voit, un cas particulier de la forme de l'intégrale

générale des équations dont toutes les caractéristiques passant par un point sont confondues; qui se confond, d'ailleurs, avec l'intégrale U_c qui est ici unique et dépend de x fonctions arbitraires (*voir* n° 6).

On peut se rendre compte, d'après la forme de l'intégrale générale, que le problème de l'intégration d'une équation à caractéristiques simples est tout différent de celui où il y a des caractéristiques confondues.

Dans le premier cas, il n'intervient qu'un nombre limité de fonctions attachées à l'équation; dans le second cas, il y a une infinité de pareilles fonctions.

L'expression de l'intégrale générale permet aussi de se faire une idée de la nature des intégrales en donnant des renseignements sur leurs principales propriétés analytiques. Ainsi, l'on reconnaît immédiatement que les singularités mobiles sont des caractéristiques, que toute intégrale est décomposable au voisinage d'un point par lequel passent plusieurs multiplicités singulières, en somme d'intégrales n'ayant chacune qu'une seule multiplicité singulière passant par ce point.

On reconnaît aussi immédiatement qu'en dehors des équations dont toutes les caractéristiques passant par un même point sont confondues, les équations linéaires n'admettent pas, en général, des intégrales uniformes au voisinage d'une singularité mobile.

14. Dans un très intéressant Mémoire, publié en 1898 dans le *Journal de M. Jordan*, M. Le Roux a montré comment on pouvait intégrer une équation linéaire d'ordre n, dont toutes les familles caractéristiques sont simples (ce qui est le cas général), lorsque l'on connaît n intégrales dépendant chacune d'un paramètre arbitraire et satisfaisant à certaines conditions, intégrales que l'auteur nomme *principales*.

Il est aisé de voir que l'expression de l'intégrale générale donnée par M. Leroux se déduit de celle qui est donnée par le théorème du n° 12, dans le cas où toutes les familles caractéristiques de l'équation sont simples ($k = 1$).

Considérons pour plus de simplicité le cas de l'équation hyperbo-

lique du second ordre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = A(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y),$$

où $A(x,y)$, $B(x,y)$ et $C(x,y)$ sont des fonctions quelconques (¹).

L'intégrale générale, d'après le théorème du n° 12, est donnée alors par

$$u(x, y) = f(x) + \varphi(y) + y\int_0^x [V_0^y(x, y, \alpha) f(\alpha) + V_1^y(x, y, \alpha) f'(\alpha)]\, d\alpha$$
$$+ x\int_0^y [V_0^x(x, y, \alpha)\varphi(\alpha) + V_1^x(x, y, \alpha)\varphi'(\alpha)]\, d\alpha.$$

Il suffira de poser

$$f(x) = a + \int_0^x F(\alpha)\, d\alpha$$

et

$$\varphi(y) = q + \int_0^y \Phi(\alpha)\, d\alpha,$$

où a et b sont des constantes arbitraires, pour obtenir, par un simple calcul d'intégration par partie, la forme donnée par M. Le Roux :

$$u(x, y) = a\, u_0(x, y) + b\, u_1(x, y)$$
$$+ \int_0^x Z_x(x, y, \alpha) F(\alpha)\, d\alpha + \int_0^y Z_y(x, y, \alpha)\Phi(\alpha)\, d\alpha,$$

où $u_0(x,y)$ et $u_1(x,y)$ sont des intégrales particulières, et Z_x et Z_y des *intégrales principales*.

Il est facile de se rendre compte que, dans le cas des caractéristiques confondues, cette transformation n'est plus possible, et l'intégrale générale donnée au n° 12 nous montre ainsi, en quelque sorte, pourquoi la méthode de M. Le Roux, basée sur l'emploi des intégrales principales, ne pouvait réussir dans ce cas.

Faisons encore remarquer que la forme donnée de l'intégrale géné-

(¹) M. Le Roux a établi pour cette équation, dans sa *Thèse* (*Annales de l'École Normale*, 1895), la plupart des théorèmes qu'il a ensuite généralisés dans le Mémoire cité.

rale de l'équation hyperbolique est susceptible d'une autre transformation.

On peut écrire, en effet :

$$\int_0^x V_1^y(x, y, \alpha) f'(\alpha)\, d\alpha$$

$$= f(x) V_1^x(x, y, x) - f(0) V_1^x(x, y, 0) - \int_0^x \frac{\partial V_1^x}{\partial \alpha} [f(\alpha) - f(0)]\, d\alpha,$$

et une égalité analogue pour

$$\int_0^y V_1^x(x, y, \alpha)\, \varphi(\alpha)\, d\alpha.$$

On a donc encore

$$u = A(x, y) f(x) + A_0(x, y) f(0) + B(x, y)\varphi(y) + B_0(x, y)\varphi(0)$$
$$+ \int_0^x E(x, y, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha + \int_0^y F(x, y, \alpha)\varphi(\alpha)\, d\alpha.$$

Si la fonction $E(x, y, \alpha)$ ou $F(x, y, \alpha)$ est de la forme

$$\lambda(\alpha) P(x, y, \alpha),$$

où $\lambda(\alpha)$ désigne une fonction quelconque de α et $P(x, y, \alpha)$, un polynome en α, à coefficients fonctions quelconques de x et de y, l'équation hyperbolique est intégrable par la méthode de Laplace. En effet, il est alors facile de voir qu'elle admet une intégrale de la forme

$$\sum_{i=0}^{p} a_i(x, y) f^i(x) \qquad \text{ou} \qquad \sum_{i=0}^{p} a_i(x, y) f^i(y),$$

où p et $a_i(x, y)$ sont quelconques et f une fonction *arbitraire*. On peut montrer que la condition de plus haut est suffisante, et l'on possède ainsi un moyen très simple pour caractériser les équations hyperboliques intégrables par la méthode de Laplace.

SUR LES

COURBES A TORSION CONSTANTE

PAR M. BERTRAND GAMBIER,

Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.

INTRODUCTION.

1. L'Académie avait proposé pour janvier 1915 de perfectionner la théorie des courbes gauches à torsion constante ; elle demandait de déterminer, si possible, celles qui sont algébriques ou tout au moins unicursales.

Les travaux publiés avant la mise au concours de ce sujet sont les suivants :

M. Kœnigs, dans une Note aussi courte qu'élégante, parue aux *Annales de Toulouse* (t. I, année 1887), indique quelques résultats relatifs à la forme des courbes algébriques réelles à torsion constante, sans envisager s'il existe ou non de telles courbes ; à l'époque où cette Note paraissait, on ne connaissait aucun exemple de telles courbes.

M. Lyon, aux *Annales de l'Enseignement supérieur de Grenoble* (t. II, année 1890), s'est efforcé de trouver par le calcul des courbes unicursales à torsion constante. La méthode suivie conduit à des calculs inextricables. L'auteur a eu le mérite de découvrir cette cubique gauche imaginaire dont les deux courbures sont constantes ; en dehors des paramètres relatifs au déplacement le plus général et du paramètre correspondant à une homothétie, la cubique ne renferme qu'un unique paramètre de *forme*, le seul qui soit vraiment intéressant.

M. Fouché, aux *Annales de l'École Normale supérieure* (année 1890), arrive à cette conclusion qu'il suffit, pour avoir toutes les courbes

algébriques, de déterminer une fonction algébrique β de la variable complexe α telle que les intégrales abéliennes $\int \frac{d\alpha}{(\beta-\alpha)^2}$, $\int \frac{\beta\, d\alpha}{(\beta-\alpha)^2}$, $\int \frac{\beta^2 d\alpha}{(\beta-\alpha)^2}$ soient elles-mêmes des fonctions algébriques de α. Par ce procédé on trouve assez aisément des courbes unicursales imaginaires.

M. Fabry (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1892) donna enfin quatre types explicites de courbes à torsion constante unicursales réelles ; l'un d'eux possède, au point de vue de la symétrie et des rotations, des propriétés pleines de conséquences fructueuses que je développerai dans ce Mémoire.

M. Cosserat, dans une Note concise des *Comptes rendus* (année 1895, t. 120), indique quelques propriétés géométriques élégantes, donnant sans effort toutes les conclusions de M. Fouché, montrant par surcroît que la détermination des surfaces minima circonscrites à une sphère est un problème identique à la recherche des courbes à torsion constante; les surfaces minima et les courbes à torsion constante correspondantes sont simultanément transcendantes ou algébriques.

L'essentiel de ces travaux est condensé dans la Note 4 de la *Théorie des surfaces* de M. Darboux; cet auteur montre, de plus, que la détermination des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution constitue lui aussi un problème identique à la recherche des courbes à torsion constante. Une courbe à torsion constante, *réelle ou imaginaire*, fournit un couple, et un seul, de deux surfaces *réelles* applicables sur le paraboloïde. La courbe et le couple sont simultanément algébriques ou transcendants.

2. Le travail que je présente ici ne diffère que par quelques remaniements et additions de celui que j'ai présenté à l'Académie et qui a été récompensé parallèlement à celui de mon camarade M. Darmois (voir *Comptes rendus*, décembre 1916).

J'ai retrouvé sans peine, par une étude plus approfondie de l'indicatrice sphérique des binormales, tous les exemples réels ou imaginaires déjà connus. J'ai donné une grande variété de types nouveaux, *unicursaux* ou de *genre non nul*, imaginaires et réels.

Ce travail est complété par un Mémoire que je publie au *Bulletin de la Société mathématique* sur les surfaces applicables sur le paraboloïde.

Les éléments imaginaires, en géométrie, n'ont souvent qu'un intérêt de curiosité, à moins de servir d'intermédiaire dans la recherche d'êtres géométriques réels. Ici, en raison de l'obtention de surfaces réelles applicables sur le paraboloïde, il y aurait grave inconvénient à laisser systématiquement de côté les courbes imaginaires à torsion constante. J'ai évité de le faire, mais j'ai réservé la majeure partie de mes efforts aux courbes réelles ; leur détermination est plus difficile que celle des courbes imaginaires ; elles donnent d'ailleurs parmi les surfaces applicables sur le paraboloïde celles qui ont un centre de symétrie.

Les courbes réelles donnent les surfaces minima réelles circonscrites à une sphère le long d'une courbe réelle ; celles qui sont imaginaires, mais coïncident avec leur conjuguée, donnent les surfaces minima réelles circonscrites à une sphère le long d'une courbe imaginaire.

CHAPITRE PREMIER.

RAPPEL DE QUELQUES RÉSULTATS ANTÉRIEURS.

1. J'indique trois manières de rattacher les courbes à torsion constante aux surfaces minima :

a. Au Tome I de la *Théorie des surfaces*, deuxième édition, page 485, M. Darboux établit cette proposition :

Toute courbe à torsion constante ($\mathcal{A}$) peut être prise pour ligne asymptotique d'une surface minima (M) qui se détermine sans aucune intégration si la courbe ($\mathcal{A}$) est connue et qui est algébrique si la courbe ($\mathcal{A}$) est algébrique.

La surface minima adjointe (M_0) est inscrite à la sphère de rayon τ [τ rayon de torsion de la courbe ($\mathcal{A}$)] suivant une courbe qui peut servir d'indicatrice sphérique aux binormales de ($\mathcal{A}$).

x, y, z étant les coordonnées d'un point de ($\mathcal{A}$) ; $c, c' c''$ les cosinus

directeurs de la binormale en ce point ; τ le rayon de torsion, la surface (M) est le lieu du point

$$(1) \qquad x = \mathrm{R}(x - ci\tau), \qquad y = \mathrm{R}(y - c'i\tau), \qquad z = \mathrm{R}(z - c''i\tau);$$

la surface (M_0) le lieu du point

$$(2) \qquad x_0 = \mathrm{R}(c\tau + ix), \qquad y_0 = \mathrm{R}(c'\tau + iy), \qquad z_0 = \mathrm{R}(c''\tau + iz).$$

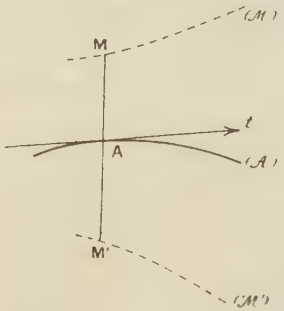
b. Cherchons quelle longueur il faut porter sur la binormale d'une courbe à partir du pied de cette binormale pour que le point M obtenu décrive une ligne minima ; M a pour coordonnées $x + lc$, $y + lc'$, $z + lc''$ et l'on trouve immédiatement

$$(3) \qquad 1 + \frac{l^2}{\tau^2} + \left(\frac{dl}{ds}\right)^2 = 0.$$

Si τ est constant, on a la solution indiquée précédemment par la surface minima (M) à savoir $l = \pm i\tau$. Réciproquement, si l'équation (3) est satisfaite pour une valeur constante de l, elle donne immédiatement $\tau = \pm il$, donc la courbe (A) est à torsion constante ; nous appliquerons cette remarque plus loin.

c. Toute courbe à torsion constante (A) peut être considérée comme ligne asymptotique d'une infinité de surfaces à courbure totale con-

Fig. 1.



stante ; en nous bornant aux surfaces réelles, la courbure est positive si la courbe (A) est imaginaire, avec un rayon de torsion imaginaire

pure ; la courbure est négative si la courbe (A) est réelle. Soit Σ l'une de ces surfaces à courbure totale constante égale à $-\tau^2$; appliquons la construction indiquée par M. Darboux (*Théorie des surfaces*, t. III, p. 383). Sur chaque normale portons une longueur égale à $\pm i\tau$; on obtient une surface à courbure moyenne constante parallèle à Σ dont les lignes de longueur nulle correspondent aux asymptotiques de Σ. Nous retrouvons le procédé précédemment indiqué faisant correspondre à la ligne ($\mathcal{A}$) une courbe minima (M). Nous voyons de plus qu'en M la tangente à (M) est orthogonale à MA ; autrement dit, le plan osculateur à la courbe (M) au point M contient la droite MAM' ; cette droite est aussi dans le plan osculateur à la courbe (M') en M'. La surface minima lieu des milieux des cordes s'appuyant sur les deux courbes (M) et (M') n'est autre que la surface minima (1) précédemment indiquée ; la surface moyenne de Ribaucour (*Théorie des surfaces*, t. I, 2e édition, p. 479) est circonscrite à cette surface minima et à Σ tout le long de la courbe ($\mathcal{A}$).

2. De ces résultats découle un procédé intéressant pour déterminer les courbes à torsion constante.

Supposons qu'il existe un couple de deux courbes minima (M) et (M') satisfaisant aux conditions suivantes :

A chaque point M de la courbe (M) correspond un point M' de (M') tel que la droite MM' soit précisément l'intersection des plans osculateurs en M et M' aux deux courbes (M) et (M').

Dans ces conditions, le milieu A de MM' décrit une courbe à torsion constante ($\mathcal{A}$).

En effet, le segment MM' orthogonal en M et M' aux deux lignes minima conserve une longueur constante. La surface minima, lieu des milieux des cordes s'appuyant sur (M) et (M'), contient la courbe ($\mathcal{A}$) ; le plan tangent en A à cette surface est le plan normal en A à MM' ; la caractéristique de ce plan tangent quand M décrit (M) est la tangente At à la courbe ($\mathcal{A}$), car cette caractéristique est perpendiculaire à MM' et à la position infiniment voisine de MM', autrement dit perpendiculaire au plan asymptote de la surface réglée engendrée par MM' ; la caractéristique se trouve donc dans le plan central de cette surface réglée relatif à la génératrice MM' ; or, en M et M', les plans tangents sont

isotropes, donc A est le point central, MM'At est le plan central, At est donc bien la caractéristique cherchée.

La courbe $(\mathfrak{v})$ admet donc pour plan osculateur en A le plan mené perpendiculairement à MM' : MM' étant la binormale de $(\mathfrak{w})$ et AM étant un segment de longueur constante dont l'extrémité décrit une ligne minima, il en résulte, d'après le paragraphe précédent, que $(\mathfrak{w})$ a sa torsion constante.

C'est la réciproque de la propriété signalée en fin du paragraphe précédent. Traduite par le calcul, on retrouve les résultats de MM. Fouché et Cosserat.

3. Pour obtenir toutes les courbes à torsion constante il est donc nécessaire et suffisant de trouver six fonctions d'un paramètre, soient $x_1y_1z_1$ et $x_2y_2z_2$ satisfaisant aux équations

$$(4)\qquad \begin{cases} dx_1^2+dy_1^2+dz_1^2=0,\\ dx_2^2+dy_2^2+dz_2^2=0,\\ (x_2-x_1)\,dx_1+(y_2-y_1)\,dy_1+(z_2-z_1)\,dz_1=0,\\ (x_2-x_1)\,dx_2+(y_2-y_1)\,dy_2+(z_2-z_1)\,dz_2=0. \end{cases}$$

Les coordonnées x, y, z du point qui décrit la courbe à torsion constante sont données par les formules

$$(5)\qquad x=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2},\qquad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

J'indique d'une façon précise les calculs à effectuer : l'équation du plan osculateur en M à la courbe (M) et les coordonnées de M seront données par les formules

$$(6)\qquad \begin{cases} (1-u^2)x_1+i(1+u^2)y_1+2uz_1+4f(u)=0,\\ x_1=(1-u^2)f''(u)+2uf'(u)-2f(u),\\ y_1=i(1+u^2)f''(u)-2iuf'(u)+2if(u),\\ z_1=2uf''(u)-2f'(u). \end{cases}$$

On a d'ailleurs

$$u=-\frac{dx_1+i\,dy_1}{dz_1}=\frac{dz_1}{dx_1-i\,dy_1}.$$

On aura de même pour la courbe (M′)

$$(7)\qquad \begin{cases} (1-\rho^2)x_2+i(1+\rho^2)y_2+2\rho z_2+4\varphi(\rho)=0,\\ x_2=(1-\rho^2)\varphi''(\rho)+2\rho\varphi'(\rho)-2\varphi(\rho),\\ y_2=i(1+\rho^2)\varphi''(\rho)-2i\rho\varphi'(\rho)+2i\varphi(\rho),\\ z_2=2\rho\varphi''(\rho)-2\varphi'(\rho). \end{cases}$$

Les cosinus directeurs de la normale en A à la surface minima sont

$$(8)\qquad c=\frac{1-u\rho}{u-\rho},\qquad c'=i\frac{1+u\rho}{u-\rho},\qquad c''=\frac{u+\rho}{u-\rho}.$$

Les équations (6) et (7) remplacent les deux premières équations (4); les deux dernières équations (4) peuvent être remplacées, en désignant par τ une constante, par

$$(9)\qquad x_2-x_1=2i\tau c,\qquad y_2-y_1=2i\tau c',\qquad z_2-z_1=2i\tau c''.$$

Ajoutons membre à membre les équations (9) après les avoir multipliées respectivement par les multiplicateurs

$$1-\rho^2,\quad i(1+\rho^2),\quad 2\rho,$$

ou encore par

$$-\rho,\quad i\rho,\quad 1,$$

ou encore par

$$-1,\quad i,\quad 0.$$

Nous obtenons

$$(10)\qquad \begin{cases} \varphi(\rho)=\dfrac{(\rho-u)^2}{2}f''(u)+(\rho-u)f'(u)+f(u),\\ \varphi'(\rho)=(\rho-u)f''(u)+f'(u)-i\tau,\\ \varphi''(\rho)=f''(u)-\dfrac{2i\tau}{\rho-u}. \end{cases}$$

Ces équations (10) doivent, comme de juste, se réduire à deux; en effet, en différentiant la première et tenant compte de la seconde, on obtient

$$(11)\qquad f''(u)\,du+2i\tau\frac{d\rho}{(\rho-u)^2}=0.$$

Mais alors, si l'on différentie la seconde équation (10), on obtient

$$\varphi''(v)\,dv = (v-u)\,f'''(u)\,du + f''(u)\,dv,$$

et en remplaçant $f'''(u)\,du$ par la valeur tirée de (11), on retombe sur la troisième équation (10) qui résulte ainsi des deux premières.

On se donnera donc arbitrairement la première courbe minima (M) ce qui revient à se donner la fonction $f(u)$; l'équation (11) donne ensuite v au moyen de u par une équation de Riccati ; ayant choisi une intégrale de cette équation, la valeur de $\varphi(v)$ est donnée par la première équation (10) et alors tout le reste est connu.

Inversement, si l'on connaît une courbe de rayon de torsion constant et égal à τ, lieu du point x, y, z, la courbe minima (M) est le lieu du point $x - i\tau c,\ y - i\tau c',\ z - i\tau c''$; la courbe minima (M′) est celui du point $x + i\tau c,\ y + i\tau c',\ z + i\tau c''$, de sorte que $u, v, f(u), \varphi(v)$ s'obtiennent algébriquement au moyen des coordonnées x, y, z du point variable A. La courbe $(\mathcal{A})$ et l'ensemble des deux courbes (M) et (M′) sont donc simultanément algébriques ou transcendantes.

Nous avons bien retrouvé la conclusion de M. Fouché, à savoir que tout revient à trouver une fonction algébrique v de la variable u telle que $\frac{1}{(u-v)^2}\frac{dv}{du}$ soit la dérivée troisième d'une fonction algébrique de u : c'est ce qu'exprime l'équation (11).

Les résultats de M. Cosserat conduisaient à la fois à retrouver cette condition et à mettre en évidence la surface minima (M_0) représentée par les équations (2).

Il est intéressant de montrer que cette équation (11) se retrouve encore par la considération de la surface minima (M). En effet $(\mathcal{A})$ est ligne asymptotique de la surface (M), donc tout le long de $(\mathcal{A})$ les rayons de courbure principaux de (M) sont égaux à $\pm\tau$; si nous employons les formules connues relatives aux asymptotiques et aux rayons principaux des surfaces minima, nous aurons, tout le long de $(\mathcal{A})$ sur la surface (M),

$$(12)\qquad \begin{cases} \sqrt{f'''(u)}\,du = i\sqrt{f_1'''(u_1)}\,du_1, \\ -2\tau = (1+uu_1)^2\sqrt{f'''(u)\,f_1'''(u_1)}; \end{cases}$$

u étant la variable déjà employée et u_1 remplaçant $\frac{-1}{v}$. L'élimination

de $f_1'''(u_1)$ donne

$$f'''(u)\,du + \frac{2i\tau\,du_1}{(1+uu_1)^2} = 0,$$

équation qui n'est autre que (11) où v est remplacée par $\frac{-1}{u_1}$.

4. Il est utile de signaler l'importance que présentent les lignes à torsion constante au point de vue de la recherche des surfaces à courbure totale constante.

Les surfaces dont la courbure totale est égale à une constante donnée $\frac{-1}{\tau^2}$ satisfont à l'équation aux dérivées partielles

$$\tau^2(rt - s^2) + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0, \tag{13}$$

et, en appliquant la méthode connue (*Théorie des surfaces* de M. Darboux, t. III, p. 263), on trouve comme équation des caractéristiques

$$\begin{cases} dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ \tau\,dp \pm (1 + p^2 + q^2)\,dy = 0, \\ \tau\,dq \mp (1 + p^2 + q^2)\,dx = 0; \end{cases} \tag{14}$$

les signes supérieurs ou inférieurs se correspondant. On déduit de là $dp\,dx + dq\,dy = 0$, c'est-à-dire que les caractéristiques sont asymptotiques des surfaces intégrales : elles ont donc pour rayon de torsion $\pm\tau$. Si l'on écrit les équations (14) sous la forme équivalente

$$\begin{cases} x = \varepsilon\tau \int \frac{dq}{(1 + p^2 + q^2)}, \\ y = -\varepsilon\tau \int \frac{dp}{1 + p^2 + q^2}, \\ z = \varepsilon\tau \int \frac{p\,dq - q\,dp}{1 + p^2 + q^2}, \end{cases} \tag{15}$$

les coordonnées x, y, z d'un point de la courbe à torsion constante (A) sont données par ces trois intégrales où p et q sont liées par une relation arbitraire. Les équations (14) ne possèdent aucune combinaison intégrable ; d'autre part, le cône directeur des binormales de (A) a pour trace sur le plan $z = -1$ par exemple la courbe lieu du point $(p, q, -1)$, de sorte que les trois intégrales (19) sont des intégrales curvilignes attachées à cette section plane du cône directeur des binormales.

Ceci montre bien l'intérêt que présente la recherche des courbes à torsion constante ; il est permis d'espérer de construire des surfaces à courbure totale constante par un assemblage convenable de courbes à torsion constante.

CHAPITRE II.

ÉTUDE SPÉCIALE DES COURBES ALGÉBRIQUES

1. Tout ce qui précède s'applique sans distinction aux courbes à torsion constante transcendantes ou algébriques.

Je suppose connu du lecteur l'exposé de M. Darboux (*Théorie des surfaces*, t. I, Chap. I et IV, et t. IV, Note 4). J'ai conservé pour le signe de la torsion celui qui est adopté au Tome I, première édition, et au Tome IV. Dans la seconde édition du Tome I, M. Darboux a été conduit à changer le signe de la torsion ; le trièdre mobile formé par la tangente à la courbe, la normale principale et la binormale est animé d'un mouvement où la rotation instantanée a pour composantes suivant ces trois droites $\frac{1}{\tau}, 0, \frac{1}{\rho}$, où ρ et τ sont les rayons de courbure et de torsion de la courbe, à condition d'adopter les conventions de signe de la seconde édition ; avec les conventions de la première édition, on a, au contraire, $\frac{-1}{\tau}, 0, \frac{1}{\rho}$. Mais ce changement de τ en $-\tau$ n'a aucune importance pour la suite.

M. Darboux insiste sur ce fait que la courbure et la torsion offrent une différence essentielle en ce sens que la première s'exprime au moyen d'un radical carré, tandis que la seconde s'exprime rationnellement au moyen de x, y, z coordonnées du point de la courbe et de leurs dérivées des trois premiers ordres. On sait l'interprétation du signe de la torsion au point de vue du sens d'enroulement de la courbe. Je profite de la circonstance pour insister sur ce fait intéressant, bien que jusqu'ici laissé dans l'ombre, c'est qu'une courbe à torsion constante, transcendante ou algébrique, ne peut admettre ni centre de

symétrie ni plan de symétrie, car dans l'une ou l'autre de ces symétries, aux points correspondants les deux rayons de torsion sont égaux et de signe contraire. La symétrie par rapport à un axe est admissible : le cône des binormales admet alors ce même axe pour axe de symétrie et le plan perpendiculaire mené par le sommet comme plan de symétrie.

2. J'adopte dans tout ce qui suit les notations suivantes :

A (x, y, z), point qui décrit la courbe $(\mathfrak{A})$ à torsion constante ;
τ, rayon de torsion de cette courbe ;
B (c, c', c''), point correspondant à A sur l'indicatrice $(\mathfrak{B})$ des torsions ;
C, cône de sommet à l'origine, admettant pour directrice $(\mathfrak{B})$; c'est le cône directeur des binormales ;
I, cône isotrope de sommet origine.

Je prends sur la génératrice OB du cône C un point arbitraire de coordonnées h, k, l qui décrira une certaine courbe sur C quand B décrira $(\mathfrak{B})$. La courbe $(\mathfrak{A})$ est donnée par les formules

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \tau \int \dfrac{l\,dk - k\,dl}{h^2 + k^2 + l^2}, \\ y = \tau \int \dfrac{h\,dl - l\,dh}{h^2 + k^2 + l^2}, \\ z = \tau \int \dfrac{k\,dh - h\,dk}{h^2 + k^2 + l^2}. \end{cases}$$

A un cône C donné correspond, à une translation près, si la constante τ est donnée, une courbe $(\mathfrak{A})$ et une seule.

Le cône C est réel si la courbe $(\mathfrak{A})$ est réelle et inversement. Le cône C est algébrique si la courbe $(\mathfrak{A})$ est algébrique, mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie (l'hélice circulaire par exemple correspond à un cône C de révolution).

Notre but est maintenant de trouver des courbes $(\mathfrak{A})$ algébriques ; nous nous bornons donc dorénavant à étudier les cônes C algébriques ; le problème est ramené à exprimer que les intégrales abéliennes (1) sont elles-mêmes des fonctions algébriques.

3. Sur la génératrice OB, prenons en particulier le point

$$\mu\left(\xi=\frac{c}{c''},\ \eta=\frac{c'}{c''},\ 1\right)$$

qui décrit la section σ de C par le plan $z=1$; nous aurons alors les formules déjà trouvées au Chapitre précédent avec de légères différences de notation :

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \tau\displaystyle\int\frac{d\eta}{1+\xi^2+\eta^2}, \\ y = -\tau\displaystyle\int\frac{d\xi}{1+\xi^2+\eta^2}, \\ z = \tau\displaystyle\int\frac{\eta\,d\xi-\xi\,d\eta}{1+\xi^2+\eta^2}. \end{cases}$$

La courbe σ est du même genre que (C) ; si $F(\xi,\eta)=0$ est l'équation dans son plan de la courbe σ, tout revient à déterminer F, de sorte que les trois intégrales (2) soient algébriques : les conditions à écrire sont algébriques par rapport aux coefficients du polynome F.

Nous allons indiquer un cas particulièrement simple où quelques-unes de ces conditions et leur interprétation géométrique s'obtiennent aisément.

Les seules singularités des intégrales (1) ou (2) correspondent aux génératrices isotropes du cône C ; supposons que C et I aient en commun une génératrice G simple sur C ; nous pouvons supposer que le plan xOy ne soit pas parallèle à G qui correspond donc à une solution finie ξ_0, η_0 des deux équations $F(\xi,\eta)=0$, $1+\xi^2+\eta^2=0$, et nous pouvons développer au voisinage de ce point l'ordonnée η :

$$(3)\qquad \eta-\eta_0=\alpha(\xi-\xi_0)+\beta(\xi-\xi_0)^2+\gamma(\xi-\xi_0)^3+\delta(\xi-\xi_0)^4+\dots;$$

d'où

$$1+\xi^2+\eta^2=2(\xi_0+\alpha\eta_0)(\xi-\xi_0)+(1+\alpha^2+2\eta_0\beta)(\xi-\xi_0)^2+2(\eta_0\gamma+\alpha\beta)(\xi-\xi_0)^3+\dots.$$

L'intégrale $\displaystyle\int\frac{d\xi}{1+\xi^2+\eta^2}$ devant être algébrique, on a évidemment

$$(4)\qquad \xi_0+\alpha\eta_0=0$$

qui exprime qu'au point ξ_0, η_0 les deux courbes $F(\xi,\eta)=0$,

$1+\xi^2+\eta^2=0$ ont même tangente; les deux cônes C et I se raccordent le long de G; supposons que G ne compte que pour deux unités dans l'intersection de C et I, autrement dit $1+\alpha^2+2\eta_0\beta\neq 0$. Alors on a

$$\frac{1}{1+\xi^2+\eta^2}=\frac{1}{(1+\alpha^2+2\eta_0\beta)(\xi-\xi_0)^2}\left[1-\frac{2(\eta_0\gamma+\alpha\beta)}{1+\alpha^2+2\eta_0\beta}(\xi-\xi_0)+\dots\right].$$

En multipliant par $d\xi$ et intégrant, on voit que, pour éviter un logarithme, on doit avoir $\eta_0\gamma+\alpha\beta=0$. Dans ces conditions, $\frac{1}{1+\xi^2+\eta^2}$ ne contient plus qu'un terme d'exposant négatif en $\frac{1}{(\xi-\xi_0)^2}$. Dans ces conditions, $d\eta$ ne devra pas contenir de terme en $\xi-\xi_0$, d'où $\beta=0$, et comme $\eta\,d\xi-\xi\,d\eta=d\xi[\eta_0-\alpha\xi_0-2\beta(\xi-\xi_0)+\dots]$, la dernière intégrale ne donnera pas de logarithme. Si nous rassemblons les conditions obtenues $\xi_0+\alpha\eta_0=0$, $\eta_0\gamma+\alpha\beta=0$, $\beta=0$, on voit qu'on doit prendre $\eta_0\gamma=0$ et, par suite, $\gamma=0$; car si η_0 était nul, ξ_0 le serait aussi, ce qui est contradictoire avec $1+\xi_0^2+\eta_0^2=0$. Le développement (3) devient donc $\eta-\eta_0=\alpha(\xi-\xi_0)+\delta(\xi-\xi_0)^3+\dots$, ce qui prouve que le plan tangent au cône C coupe C suivant quatre génératrices confondues avec G.

Donc, si le cône C admet une génératrice isotrope simple G, il se raccorde avec I le long de G, et si le contact est simple, G est génératrice surinflexionnelle pour C.

Si le contact entre C et I était d'ordre plus élevé le long de OG, on formerait de même les conditions; mais, par cette méthode, l'interprétation géométrique serait assez difficile à obtenir.

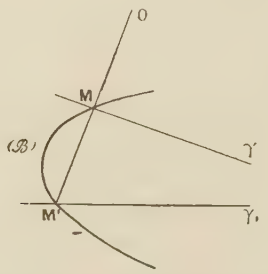
Remarquons en passant, et ceci sera utile pour les dénombrements ultérieurs, qu'une génératrice isotrope de C fournit deux sortes de conditions : un premier groupe de conditions est relatif au contact entre C et I; le second groupe s'obtient en annulant les résidus des intégrales (2) relatifs à cette génératrice; ce second groupe fournit trois équations au plus; ici, il n'y a que deux équations résiduelles.

Je me suis servi de la section plane σ, ce qui revient dans les intégrales (1) à adopter le point $(\xi, \eta, 1)$; on peut aussi se servir de l'indicatrice (♑), ce qui revient à adopter le point (c, c', c''). Voyons ce que devient l'interprétation géométrique précédente quand on étudie (♑).

Pour pouvoir employer un langage géométrique simple, je fais une transformation homographique (imaginaire, mais peu importe) faisant correspondre un hyperboloïde à une nappe H à la sphère et le cône de sommet O circonscrit à l'hyperboloïde au cône I; le cône C devient un cône de sommet O; je conserve dans la nouvelle figure les mêmes lettres C, I, $\aleph$; P étant le plan de la conique de contact de I avec H, une homologie de pôle O et plan directeur P transforme H et $\aleph$ en eux-mêmes. Un plan tangent quelconque à I coupe H suivant deux génératrices γ et γ_1 se transformant l'une dans l'autre dans cette homologie; M étant un point commun à γ et ($\aleph$), le point homologique M_1 appartient à γ_1 et ($\aleph$). Donc pour obtenir toutes les génératrices communes au cône C et au plan tangent au cône I en question, il suffit de prendre tous les points d'intersection avec ($\aleph$) de l'une des deux génératrices γ ou γ_1, γ par exemple.

Imaginons donc que C et I aient en commun une génératrice OG simple, le long de laquelle ils ont un contact simple : au point p où OG perce le plan P, C est tangent à H, donc l'intersection ($\aleph$) de C et H présente en p un point double, les deux branches qui s'y croisent

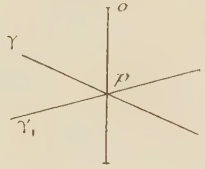
Fig. 2.



sont homologiques l'une de l'autre; cherchons l'intersection du cône C avec le plan tangent commun à C et I le long de OG; les deux génératrices γ et γ_1 passent en p. Conformément à ce qui précède, adoptons γ. Si γ n'est tangente à aucune des deux branches de ($\aleph$) qui se croisent en p, le point p compte pour deux dans l'intersection de γ avec ($\aleph$), donc le plan tangent à C le long de OG a un contact simple avec C; si, au contraire, γ a un contact d'ordre h avec l'une des branches, γ a avec

cette branche $h+1$ points communs réunis en p et avec l'autre branche qui est tangente à γ_1 un seul point commun : au total, p compte pour

Fig. 3.



$h+2$ dans l'intersection de γ avec $(\mathfrak{M})$, le plan tangent à C le long de OG a un contact d'ordre $h+1$ avec le cône C.

Appliquons ceci au cas particulier étudié; nous avons trouvé $h+2 \geq 4$, donc $h \geq 2$; autrement dit, γ est tangente stationnaire pour l'une des branches de $\mathfrak{M}$; γ_1 tangente stationnaire pour l'autre branche.

Je ferai de nombreuses applications de cette étude.

4. Je reprends les intégrales (1) ou (2). Au voisinage d'une génératrice non isotrope de C, ces intégrales sont régulières. On doit exprimer que la singularité logarithmique disparaît pour chaque génératrice isotrope de C. Pour trouver sans peine les conditions résiduelles, je me servirai systématiquement de la courbe σ; je pose :

$$\xi + i\eta = \lambda, \qquad \xi - i\eta = \mu; \tag{5}$$

$$\begin{cases} x + iy = -\tau i \int \dfrac{d\lambda}{1+\lambda\mu} = -\tau i I_1, \\ x - iy = \tau i \int \dfrac{d\mu}{1+\lambda\mu} = \tau i I_2, \\ 2z = -\tau i \int \dfrac{\lambda\, d\mu - \mu\, d\lambda}{1+\lambda\mu} = -\tau i I_3. \end{cases} \tag{6}$$

Soit une génératrice isotrope G du cône C, simple ou multiple. Si je coupe le cône C par un plan quelconque, la trace de G sur ce plan est un point de cette section plane, origine sur cette section d'un ou plusieurs cycles; je considère ce cycle, s'il est unique, ou l'un deux s'il y en a plusieurs. Le cycle en question est caractérisé par deux entiers positifs, le degré p et la classe q; ces deux entiers sont attachés à la

génératrice G et ne changent pas si je remplace la section plane par une autre section plane. Je prends donc cette fois comme plan xOy un plan parallèle à G, de sorte que la section σ par le plan $z = 1$ présente une direction infinie cyclique et dans ces conditions nous pourrons représenter la branche infinie relative au cycle considéré par les développements convergents pour t suffisamment petit :

$$(7)\qquad \begin{cases} \lambda = B t^q + B_1 t^{q+1} + \dots, \\ \mu = \dfrac{A}{t^p} + \dfrac{A_1}{t^{p-1}} + \dots; \end{cases}$$

A et B sont différents de zéro; $1 + \lambda\mu = 1 + AB t^{q-p} + \dots$.

Je vais montrer d'abord que $q < p$ est impossible. Dans ce cas, on aurait en effet

$$1 + \lambda\mu = \frac{AB}{t^{p-q}} + \dots$$

et

$$I_2 = \int \left[\frac{-(p+q)}{t} + a_0 + a_1 t + \dots \right] dt$$

et alors il y aurait singularité logarithmique.

Il reste donc simplement deux hypothèses : $q > p$ ou bien $q = p$. Ceci entraîne bien que q ne soit pas nul, de sorte que p est bien le degré du cycle, q sa classe et que, de plus, le plan tangent au cône C le long de G soit le plan isotrope $x + iy = 0$; il y a encore raccordement entre le cône C et le cône I.

Prenons d'abord $q > p$; dans ce cas, on a

$$1 + \lambda\mu = 1 + AB t^{q-p} + \dots, \qquad \frac{1}{1+\lambda\mu} = 1 - AB t^{q-p} + \dots.$$

Si l'on remarque que $d\lambda$ et $\frac{1}{1+\lambda\mu}$ ne contiennent pas de termes à exposant négatif, l'intégrale I_1 ne donne aucune condition. On a

$$I_2 = \int \frac{d\mu}{1+\lambda\mu} = \int d\mu [1 - AB t^{q-p} + \dots].$$

On peut remarquer que $d\mu$ ne contient pas de terme en $\frac{1}{t}$, donc en multipliant $d\mu$ par 1, la partie obtenue ne donne pas de singularité logarithmique; si l'on multiplie $d\mu$ par la partie complémentaire

$(-AB t^{q-p}+\ldots)$, on remarque que $d\mu$ commence par un terme en t^{-p-1}; donc, si $q-p \geq p+1$ ou $q \geq 2p+1$, I_2 ne donnera aucune condition. Il est impossible que $q=2p$, car on obtiendrait un terme unique en $\frac{1}{t}$ ne pouvant se réduire; enfin, si $2p>q>p$, on aura une condition facile à former. Enfin, $\lambda d\mu - \mu d\lambda$ commence évidemment par un terme en t^{q-p-1} dont l'exposant est nul ou positif, donc I_3 ne donne pas de condition.

En résumé, si q est supérieur à p, q ne peut être égal à $2p$; si q est compris entre p et $2p$, on ne trouve qu'une condition résiduelle; si q surpasse $2p$, on n'a aucune condition résiduelle; j'aurai l'occasion de faire de nombreuses applications de cette dernière remarque.

Soit maintenant $q=p$; dans ce cas, il est impossible que $1+AB$ soit différent de zéro, car on aurait, dans le cas contraire,

$$I_3=\int\left[\frac{-2pAB}{t}+\ldots\right]\left[\frac{1}{1+AB}+\ldots\right]dt,$$

d'où singularité logarithmique.

Je suppose donc

$$q=p, \qquad 1+AB=0, \qquad 1+\lambda\mu=Kt^r+\ldots, \qquad \frac{1}{1+\lambda\mu}=\frac{1}{Kt^r}[1+\alpha t+\ldots];$$

$$(8)\qquad \begin{cases} I_1=\displaystyle\int\frac{[Bpt^{p-1}+\ldots][1+\alpha t+\ldots]}{Kt^r}dt, \\ I_2=\displaystyle\int\left[\frac{-Ap}{t^{p+1}}+\ldots\right]\frac{1+\alpha t+\ldots}{Kt^r}dt, \\ I_3=\displaystyle\int\left[\frac{2p}{t}+\ldots\right]\frac{1+\alpha t+\ldots}{Kt^r}dt. \end{cases}$$

On annule dans I_2 et I_3 le coefficient de $\frac{1}{t}$ sous le signe $\int$; quant à I_1, si $1 \leq r \leq p-1$, elle ne donne pas de condition; $r=p$ est impossible; si $p+1 \leq r$, I_1 donne une condition.

Nous allons résumer ceci et l'éclairer par une interprétation géométrique : si l'on pose $\mu=\frac{X}{Y}$, $\lambda=\frac{Z}{Y}$, on peut écrire

$$(9)\qquad \begin{cases} X=A+A_1t+\ldots, \\ Y=t^p, \\ Z=Bt^{p+q}+\ldots. \end{cases}$$

Nous avons déjà remarqué que q n'est pas nul puisque $q \geq p$ et cela justifie bien que p est le degré, q la classe du cycle. La génératrice G a pour équations $z = 0$, $x = iy = 0$; elle compte pour p dans l'intersection du cône C avec un plan quelconque passant par G, distinct du plan tangent $x + iy = 0$ qui est en même temps tangent au cône I; elle compte pour $p + q$ dans l'intersection de C avec le plan tangent isotrope : on remarque que ce nombre $p + q$ est au moins égal à $2p$. L'intersection des deux cônes C et I résulte en coordonnées homogènes de l'équation $Y^2 + Z = 0$; or

$$Y^2 + XZ = t^{2p} + AB t^{p+q} + \dots \tag{10}$$

Si donc $q > p$, la génératrice G compte pour $2p$ dans l'intersection de C et I et pour $p + q > 2p$ dans l'intersection de C avec son plan tangent le long de G. Si $q = p$, G compte pour $2p + r$ dans l'intersection de C et I et pour $2p$ dans l'intersection de C avec son plan tangent, car dans ce cas on a écrit

$$Y^2 + XZ = kt^{2p+r} + \dots \tag{11}$$

J'appellerai indice de G et je représenterai par i la contribution du cycle étudié dans l'intersection de C et I. Le fait remarquable est que l'on a eu à choisir entre les deux systèmes

$$q = p + s, \qquad i = 2p; \tag{12}$$

$$q = p, \qquad i = 2p + r, \tag{13}$$

qui s'excluent mutuellement : s entier positif non nul, r entier positif non nul.

On peut tirer de là quelques conclusions simples : si l'indice i est impair, on est nécessairement dans le cas $q = p$. Le cas de $i = 3$ est impossible, en courbes algébriques, car nous avons vu que $r = p$ est impossible; or $i = 3$ entraîne nécessairement $p = r = 1$.

Si l'on a $i = 2$, on a $p = 1$ et $q = p + s = s + 1$; or, $s = p = 1$ est impossible, donc $s \geq 2$; mais alors dans ce cas on a $q \geq 3$ ou $q \geq 2p + 1$, donc il n'y a pas de condition résiduelle; donc $i = 2$ entraîne comme conditions nécessaires et suffisantes pour la part de G, $p = 1$, $q \geq 3$, comme nous l'avons vu plus haut géométriquement au paragraphe 3.

Pour le dénombrement des conditions, on pourra se rappeler que

si $q = p + s$, on obtient une seule condition résiduelle si $1 \leq s \leq p - 1$ et aucune condition si $s = \geq p + 1$. Si $q = p$, $i = 2p + r$, on a deux conditions résiduelles si $1 \leq r \leq p = 1$ et trois si $r \geq p + 1$.

5. Si donc on se donne un cône algébrique C ou simplement l'équation $F(\xi, \mu) = 0$ de la section σ, on voit :

1° Que toute génératrice isotrope de C donne un point de (A) à distance finie et régulier;

2° Que toute génératrice isotrope de C donne un point à l'infini correspondant à une singularité polaire logarithmique si l'on n'écrit aucune condition; si l'on veut que (Δ) soit algébrique, il y a à écrire pour chaque génératrice isotrope des conditions de deux espèces : les unes fixent les trois entiers p, q, i et ce n'est qu'après avoir fixé d'une façon précise ces trois entiers que l'on peut écrire les conditions résiduelles en nombre égal à 3, 2, 1 ou 0, suivant le cas. Le point correspondant de (Δ) est à l'infini et correspond alors à une singularité polaire.

Ceci fait : ou bien le cône C est unicursal, alors les conditions déjà formées, qui sont *nécessaires*, se trouvent être *suffisantes*, d'après les principes connus; ou bien le cône C est de genre non nul, soit g. Les conditions formées, toujours nécessaires, ne sont plus suffisantes. Chaque intégrale I_1, I_2, I_3 a $2g$ périodes cycliques (au plus). En annulant les $6g$ périodes en question, on a $6g$ équations (au plus) à adjoindre aux précédentes; l'ensemble de toutes ces équations est à la fois nécessaire et suffisant. Les coordonnées x, y, z du point courant de (Δ) sont des fractions rationnelles des coordonnées ξ, η du point correspondant de σ; la réciproque est évidente.

6. Nous devons maintenant indiquer le degré de la courbe (Δ). Il suffit pour cela de compter le nombre des zéros de l'expression $ux + vy + wz + h$ où u, v, w, h sont des constantes arbitraires; or, le nombre des zéros ou des pôles est le même; il suffira donc de compter les pôles avec leur degré.

Reprenons le cycle étudié : si $q = p$, le terme d'exposant négatif le plus élevé provient de I_2, le degré du pôle est $p + r$ ou si l'on veut $i - p$. Si $q > p$, i est encore I_2 qui donne le degré, égal à p cette fois, suscep-

tible encore d'être représenté par $i-p$. Si donc nous appelons m le degré du cône C, M le degré de $(\mathfrak{d})$, on aura $\mathrm{M}=\Sigma(i-p)=2m-\Sigma p$. Si l'on remarque que $i\geq 2p$, on a $2m=\Sigma i\geq 2\Sigma p$ ou $m\geq\Sigma p$, donc $\mathrm{M}=2m-\Sigma p\leq m$. Le résultat $m\leq \mathrm{M}<2m$ ou $\frac{\mathrm{M}}{2}<m\leq \mathrm{M}$ est intéressant à retenir; si l'on se donne l'un des nombres M ou m, l'autre est limité inférieurement et supérieurement. L'égalité $m=\mathrm{M}$ ne peut ainsi avoir lieu que si tous les cycles sont du type $q>p$. Ici, il serait commode d'écrire pour chaque cycle $i=2p+r$, r étant un entier positif ou nul; on a

$$m=\frac{1}{2}\Sigma i=\Sigma\left(p+\frac{r}{2}\right),\qquad \mathrm{M}=\Sigma(p+r),$$

$$\mathrm{M}-m=\sum\frac{r}{2}.$$

Si la courbe $(\mathfrak{d})$ est réelle, C est réel et inversement; dans ce cas, à chaque génératrice G correspond la génératrice conjuguée qui donne les mêmes entiers p, q, i; donc le degré de la courbe réelle $(\mathfrak{d})$ est nécessairement pair; si $(\mathfrak{d})$ est imaginaire, on peut avoir des courbes de degré impair : exemple, la cubique de M. Lyon.

7. Il importe de compléter ce qui précède en se rendant compte de la disposition que présentent $(\mathfrak{w})$ et $(\mathfrak{d})$ pour les génératrices isotropes de C. Soit d'abord $q=p+s$, $i=2p$. On a

$$(14)\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{c}{\xi}=\dfrac{c'}{\eta}=\dfrac{c''}{1}=\dfrac{c+ic'}{\lambda}=\dfrac{c-ic'}{\mu}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda\mu}},\\[2ex]\dfrac{1}{1+\lambda\mu}=1-\mathrm{AB}t^{q-p}+\ldots,\qquad \dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda\mu}}=1-\dfrac{\mathrm{AB}}{2}t^{q-p}+\ldots,\\[2ex]c+ic'=\mathrm{B}t^{q}+\ldots,\qquad c-ic'=\dfrac{\mathrm{A}}{t^{p}}+\ldots,\qquad c''=1-\dfrac{\mathrm{AB}}{2}t^{q-p}+\ldots.\end{array}\right.$$

La génératrice G a pour équations $x+iy=0$, $z=0$. La courbe $(\mathfrak{w})$ admet le point à l'infini de G pour point d'ordre p, la tangente en ce point est la droite $x+iy=0$, $z-1=0$, c'est-à-dire une génératrice de la sphère $x^2+y^2+z^2=1$ parallèle à G et cette tangente a q points communs avec la courbe $(\mathfrak{w})$ réunis au point de contact; le plan oscillateur à la courbe $(\mathfrak{w})$ au point à l'infini étudié est le plan $x+iy=0$, c'est-à-dire le plan tangent commun à C et I le long de OG, ce plan

a $p+q$ points communs avec la courbe (⁂) réunis au point de contact. La génératrice G compte aussi pour $p+q$ parmi les droites d'intersection du cône C et du plan $x+iy=0$. Quant à la courbe (⁂), d'après les formules (6) et (7) on a

$$(15)\qquad \begin{cases} x+iy = \tau i \mathrm{I}_1 = -\tau i[\mathrm{B}\,t^q+\dots], \\ x-iy = \tau i \mathrm{I}_2 = \tau i\left[\dfrac{\mathrm{A}}{t^p}+\dots\right], \\ 2z = -\tau i \mathrm{I}_3 = -\tau i\left[\dfrac{\mathrm{AB}(p+q)}{p-q}\,t^{q-p}+\dots\right]; \end{cases}$$

d'où il résulte immédiatement que le point provenant de G est à l'infini dans la direction OG; c'est un point multiple d'ordre p; la tangente en ce point, en adoptant les constantes d'intégration des formules (15), est la génératrice G qui admet avec la courbe (⁂) q points communs confondus avec le point de contact; le plan osculateur est le plan $x+iy=0$ ayant $p+q$ points communs avec la courbe.

Soit maintenant $q=p$, $i=2p+r$. On a

$$(16)\qquad \begin{cases} c+ic' = \dfrac{\mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{K}}}\,t^{p-\frac{r}{2}}+\dots, \\ c-ic' = \dfrac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{K}}}\,\dfrac{1}{t^{p+\frac{r}{2}}}+\dots, \\ c'' = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{K}}}\,\dfrac{1}{t^{\frac{r}{2}}}+\dots; \end{cases}$$

ce qui prouve que le point à l'infini de (⁂), à savoir le point à l'infini de la droite $Gx+iy=0$, $z=0$, est, quand r est pair, multiple d'ordre p; la tangente est la droite à l'infini du plan $x+iy=0$, le plan osculateur est le plan $x+iy=0$; le plus petit des deux nombres $p+\frac{r}{2}$ et $2p$ donne le nombre de points communs avec la tangente, l'autre le nombre de points communs avec le plan osculateur. Si r est impair, la disposition des éléments géométriques reste la même, mais l'ordre de multiplicité est $2p$ et le nombre de points communs avec la tangente ou le plan osculateur est l'un des deux

nombres $2p+r$ ou $4p$. Quant à la courbe $(\mathcal{A})$, on

$$(17)\qquad \begin{cases} x+iy=-\tau i\mathrm{I}_1=-\tau i\left[\dfrac{\mathrm{B}p}{\mathrm{K}}\dfrac{t^{p-r}}{p-r}+\dots\right], \\ x-iy=\tau i\mathrm{I}_2=\tau i\left[\dfrac{\mathrm{A}p}{\mathrm{K}}\dfrac{t^{p+r}}{(p+r)t^{p+r}}+\dots\right], \\ 2z=-\tau i\mathrm{I}_3=\tau i\left[\dfrac{2p}{r\mathrm{K}t^r}+\dots\right], \end{cases}$$

et cette fois la parité de r ne joue plus aucun rôle, mais c'est à p et non plus $2p$ qu'il faut comparer r; r, comme nous savons, ne peut être égal à p. Si $r<p$, le point à l'infini de $(\mathcal{A})$, qui est toujours le point à l'infini de G, est multiple d'ordre p; la tangente est la droite à l'infini du plan isotrope $x+iy=0$, elle a $p+r$ points communs, réunis en ce point avec la courbe $(\mathcal{A})$; le plan osculateur est le plan $x+iy=0$ qui a en ce point $2p$ points communs avec $(\mathcal{A})$.

Si $r>p$, le point à l'infini est encore multiple d'ordre p; la tangente est la même que précédemment, mais elle a au point de contact $2p$ points réunis communs avec $(\mathcal{A})$, le plan osculateur est le plan de l'infini qui a $p+r$ points communs confondus en ce point avec la courbe $(\mathcal{A})$.

On voit donc que toute courbe algébrique à torsion constante a tous ses points à l'infini sur le cercle de l'infini; le plan osculateur en chacun de ces points est ou bien isotrope ou confondu avec le plan de l'infini. Si la courbe est réelle, elle est donc de degré pair et fermée.

8. Nous avons à faire la même étude séparément pour chaque cycle isotrope.

Cela amène naturellement à considérer l'intersection de C avec la sphère $x^2+y^2+z^2=1$ et à distinguer le cas où cette intersection ne se décompose pas du cas où elle se décompose en deux courbes symétriques l'une de l'autre par rapport au centre de la sphère.

Dans le premier cas, la courbe $(\mathcal{A})$ admet le centre de la sphère comme centre de symétrie, la surface minima (M_0) circonscrite à la sphère le long de $(\mathcal{A})$ admet l'origine pour centre, la surface

minima (M) est double. Dans le second cas, la surface minima M est simple. Nous reviendrons sur ces propriétés.

Le fait que ($\mathfrak{V}$ peut être indécomposable ou non est aussi à considérer quand il s'agit de chercher les axes de symétrie que peut posséder une courbe à torsion constante. Si un tel axe existe, les binormales aux points qui se correspondent sont elles-mêmes symétriques par rapport à l'axe, de sorte que l'intersection complète de C avec la sphère admet à la fois un axe de symétrie D parallèle au proposé et un plan P de symétrie perpendiculaire à cet axe; si la directrice sphérique est indécomposable, elle admet D pour axe de symétrie, P pour plan de symétrie, O pour centre de symétrie; mais si elle se décompose en deux courbes ($\mathfrak{V}$) et ($\mathfrak{V}'$) symétriques l'une de l'autre par rapport à O, deux cas peuvent se présenter :

1° $\mathfrak{V}'$ est symétrique de $\mathfrak{V}$ par rapport à D, ($\mathfrak{V}$) [ainsi que ($\mathfrak{V}'$)] admet P pour plan de symétrie ;

2° $\mathfrak{V}'$ est symétrique de $\mathfrak{V}$ par rapport à P, ($\mathfrak{V}$) [ainsi que ($\mathfrak{V}'$)] admet D pour axe de symétrie.

Quant à la section plane σ, si l'on a pris D pour axe des z, que la directrice sphérique de C soit ou non décomposable, elle admet pour centre de symétrie le point $(0, 0, 1)$ où son plan rencontre D.

Il est utile de montrer que, réciproquement, si σ admet le point $(0, 0, 1)$ pour centre, la courbe ($\mathfrak{A}$), *supposée algébrique*, admet un axe de symétrie parallèle à l'axe des z. Pour déterminer ($\mathfrak{A}$), j'écris :

$$(18)\qquad \begin{cases} x = \tau \displaystyle\int_{\xi_0,\eta_0}^{\xi,\eta} \frac{d\eta}{1+\xi^2+\eta^2}, \\ y = -\tau \displaystyle\int_{\xi_0,\eta_0}^{\xi,\eta} \frac{d\xi}{1+\xi^2+\eta^2}, \\ z = \tau \displaystyle\int_{\xi_0,\eta_0}^{\xi,\eta} \frac{\eta\, d\xi - \xi\, d\eta}{1+\xi^2+\eta^2}, \end{cases}$$

où (ξ_0, η_0) est un point pris sur σ une fois pour toutes; le point mobile (ξ, η) décrit σ; les intégrales curvilignes sont prises sur σ de (ξ_0, η_0) à (ξ, η).

Je considère le point A′ correspondant à $(-\xi, -\eta)$, j'ai :

$$(19)\qquad \begin{cases} x' = \tau \displaystyle\int_{\xi_0,\,\eta_0}^{-\xi,\,-\eta} \frac{d\eta}{1+\xi^2+\eta^2}, \\ y' = -\tau \displaystyle\int_{\xi_0,\,\eta_0}^{-\xi,\,-\eta} \frac{d\xi}{1+\xi^2+\eta^2}, \\ z' = \tau \displaystyle\int_{\xi_0,\,\eta_0}^{-\xi,\,-\eta} \frac{\eta\,d\xi - \xi\,d\eta}{1+\xi^2+\eta^2}. \end{cases}$$

En raison de la symétrie de σ, nous pouvons, au lieu de (19), écrire

$$(20)\qquad \begin{cases} x' = -\tau \displaystyle\int_{-\xi_0,\,-\eta_0}^{\xi,\,\eta} \frac{d\eta}{1+\xi^2+\eta^2}, \\ y' = \tau \displaystyle\int_{-\xi_0,\,-\eta_0}^{\xi,\,\eta} \frac{d\xi}{1+\xi^2+\eta^2}, \\ z' = \tau \displaystyle\int_{-\xi_0,\,-\eta_0}^{\xi,\,\eta} \frac{\eta\,d\xi - \xi\,d\eta}{1+\xi^2+\eta^2}. \end{cases}$$

De (18) et (20), on tire évidemment

$$(21)\qquad \begin{cases} x + x' = \tau \displaystyle\int_{\xi_0,\,\eta_0}^{-\xi_0,\,-\eta_0} \frac{d\eta}{1+\xi^2+\eta^2}, \\ y + y' = -\tau \displaystyle\int_{\xi_0,\,\eta_0}^{-\xi_0,\,-\eta_0} \frac{d\xi}{1+\xi^2+\eta^2}, \\ z - z' = \tau \displaystyle\int_{\xi_0,\,\eta_0}^{-\xi_0,\,-\eta_0} \frac{\eta\,d\xi - \xi\,d\eta}{1+\xi^2+\eta^2}. \end{cases}$$

La dernière intégrale (21) est nulle, car changer ξ en $-\xi$ et η en $-\eta$ revient, d'une part, en raison de la symétrie, à laisser l'intégrale inaltérée, et, d'autre part, à changer simplement les limites. On a donc bien

$$(22)\qquad x + x' = a, \qquad y + y' = b, \qquad z - z' = 0;$$

a et b étant des constantes. La démonstration est donc faite; mais ceci pourrait être en défaut si les intégrales n'étaient pas algébriques, car chacune serait déterminée seulement à une somme de périodes près; l'exemple de l'hélice circulaire met précisément la démonstration en défaut.

De même, si le cône C se reproduit par une rotation de l'angle $\frac{2\pi}{m}$ autour de Oz, la courbe $(\mathfrak{A})$ supposée algébrique jouit de la même propriété; dans le cas où la directrice sphérique $(\mathfrak{B})$ est indécomposable, il n'y a rien à ajouter; mais si elle se décompose en une courbe $(\mathfrak{B})$ et la courbe $(\mathfrak{B}')$ symétrique de $(\mathfrak{B})$ par rapport à O, la rotation $\frac{2\pi}{m}$ peut ou bien faire coïncider $(\mathfrak{B})$ avec elle-même ou bien l'appliquer sur $(\mathfrak{B}')$. La démonstration est toute pareille et se fait par l'intermédiaire de σ, l'axe de rotation ayant été pris pour axe Oz.

9. Nous pouvons maintenant donner une représentation géométrique simple des conditions d'algébricité de la courbe $(\mathfrak{A})$ correspondant à un cône algébrique C donné.

Nous avons négligé jusqu'ici la courbe $(\mathfrak{B})$ pour σ, parce que, au cas où la directrice sphérique de C est indécomposable, cette directrice est d'un genre en général supérieur à celui de la directrice plane σ. Revenons désormais à $(\mathfrak{B})$; nous pouvons établir une correspondance point par point entre $(\mathfrak{B})$ et une certaine courbe plane $\Pi(X, Y) = 0$, de telle sorte que c, c', c'' soient exprimées rationnellement en X, Y et inversement; d'autre part, le point analytique (X, Y) peut être figuré par un point d'une surface de Riemann convenablement choisie; au point $B(c, c', c'')$ de $(\mathfrak{B})$, j'associe donc le point figuratif b de cette surface de Riemann. Si le cône C algébrique a été pris quelconque, les formules déjà employées

$$(23)\qquad \begin{cases} x = \tau \int_{B_0}^{B} c''\,dc' - c'\,dc'', \\ y = \tau \int_{B_0}^{B} c'\,dc - c\,dc', \\ z = \tau \int_{B_0}^{B} c\,dc'' - c''\,dc, \end{cases}$$

où B_0 est un point fixe de $(\mathfrak{B})$ et B le point variable, déterminent les coordonnées x, y, z du point A de $(\mathfrak{A})$ une fois indiqué le chemin suivi de b_0 à b. Les diverses déterminations de x, y, z ne diffèrent que par des périodes polaires ou cycliques, c'est-à-dire ne diffèrent que

par des intégrales prises le long de certains chemins fermés suivis sur la surface de Riemann, de sorte que si l'on considère tous les points réels et imaginaires de la courbe (𝔐), on prend les intégrales sur certains circuits fermés, réels ou imaginaires, partant d'un point de (𝔐) et y revenant. Par exemple, pour une génératrice isotrope G du cône C, on aura un point g de la surface de Riemann et un circuit fermé décrit autour du point g, auquel correspond sur l'indicatrice (𝔐) un certain arc imaginaire entourant la génératrice isotrope considérée. Je définirai même avec précision le circuit décrit autour de g : si g n'est pas point de ramification, on prendra un cercle de rayon infiniment petit décrit dans le sens direct une seule fois autour de g, et si g est point de ramification, le circuit décrit dans le sens direct autour de g limitant le domaine du point g. Si u, v, w sont les valeurs des trois intégrales $\tau\int c''dc' - c'dc''$, $\tau\int cdc'' - c''dc$, $\tau\int c'dc - cdc'$ le long de ce circuit fermé, le vecteur (u, v, w) sera le *vecteur période polaire* de la courbe (𝔏) relatif à la génératrice isotrope G. Si le cône C est de genre supérieur ou égal à l'unité, il y aura lieu de définir les *vecteurs périodes cycliques* de la courbe (𝔏) correspondant aux circuits donnant sur la surface de Riemann les périodes cycliques des trois intégrales. Si donc (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2), ..., (u_n, v_n, w_n) sont les divers vecteurs périodes, polaires ou cycliques, au point x, y, z de (𝔏) correspondent une infinité de points congruents :

$$(24)\qquad \begin{cases} x + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n, \\ y + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n, \\ z + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_n w_n, \end{cases}$$

où les λ sont des nombres entiers, positifs ou négatifs, arbitraires.

La condition nécessaire et suffisante pour que la courbe (𝔏) soit algébrique est que chacun des vecteurs (u_1, v_1, w_1), ..., (u_n, v_n, w_n) soit nul. On peut remarquer que si (𝔐) est de genre supérieur à σ, la surface de Riemann relative à (𝔐) peut être remplacée par la surface de Riemann plus simple relative à σ, mais cela importe peu pour le but que je me propose dans ce paragraphe.

Songeons maintenant à l'interprétation géométrique des trois inté-

grales $\int c'dc'' - c''dc'$, $\int c''dc - cdc''$, $\int cdc' - c'dc$ qui entrent en jeu ici. M. Kœnigs, dans la Note rappelée plus haut, l'a donnée. Soit un arc B_0B de $(\mathfrak{B})$; je le décompose en un certain nombre d'arcs infiniment petits B_0B_1, B_1B_2, B_2B_3, ..., $B_{k-1}B$ dont le nombre k croît indéfiniment; les cordes B_0B_1, B_1B_2, ..., $B_{k-1}B$ forment un système de vecteurs ayant pour résultante de translation la corde B_0B et, à la limite, pour moment résultant par rapport à l'origine $\int_{B_0}^{B} c'dc'' - c''dc'$, $\int_{B_0}^{B} c''dc - cdc''$, $\int_{B_0}^{B} cdc' - c'dc$. Si le point B coïncide avec B_0, nous avons un circuit fermé, réel ou imaginaire, partant de B_0 et y revenant; le système de vecteurs que nous avons imaginé forme un couple; l'axe de ce couple est compris dans l'une des expressions

$$(25)\qquad \begin{cases} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n, \\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n, \\ \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_n w_n. \end{cases}$$

Si la courbe $(\mathfrak{A})$ est algébrique, chacun des circuits fermés découpés sur la courbe $(\mathfrak{B})$ donne un système de vecteurs constituant, non plus un couple, mais un système équivalent à zéro.

M. Kœnigs, qui a introduit cette conception, ne l'avait appliquée qu'à un circuit unique, à savoir le circuit réel constitué par la portion réelle de l'indicatrice $(\mathfrak{B})$.

Il faut exprimer que tous les points de l'ensemble (25) se réduisent à l'origine. Il y a lieu d'étudier à part les vecteurs périodes polaires et les vecteurs périodes cycliques.

On sait que la somme des résidus d'une fraction rationnelle sur une surface de Riemann est nulle. Donc, pour les vecteurs périodes polaires, il suffira d'exprimer que les vecteurs relatifs à toutes les génératrices isotropes, moins une prise au hasard, se réduisent à zéro. En particulier, si le cône C n'a qu'une génératrice isotrope, auquel cas il est nécessairement imaginaire, le résidu est nul pour chaque intégrale, et alors si C est unicursal, la courbe $(\mathfrak{A})$ est algébrique. Nous verrons plus loin que la détermination des cônes unicursaux à unique génératrice isotrope revient à la résolution de l'identité célèbre $AD - BC = 1$

entre quatre polynomes ; j'y reviendrai plus loin. La cubique de M. Lyon est le type le plus simple.

La réduction du nombre total de conditions, si le cône C présente soit un axe de rotation, soit un axe et un plan de symétrie, devient intuitive. L'ensemble des points donnés par les formules (25) possède évidemment la propriété de se reproduire par les rotations et les symétries du cône C. Remarquons, en effet, qu'un circuit fermé et le symétrique de ce circuit par rapport à l'origine ont même axe; on peut donc se borner aux rotations laissant le cône C invariant; un circuit fermé découpé sur $(\mathfrak{w})$ devient après la rotation, suivie s'il est besoin d'une symétrie par rapport à O, un circuit fermé découpé sur $(\mathfrak{w})$; le vecteur période n'a fait que tourner autour de l'axe de rotation de l'angle caractérisant cette rotation. Et ceci, bien entendu, s'applique aux points qui dérivent de la composition des vecteurs périodes polaires pris isolément; pour les vecteurs périodes cycliques, ceci s'applique aussi.

Donnons dès maintenant une application très simple : supposons que le cône algébrique C n'ait que deux génératrices isotropes ; si le cône C ne présente aucune propriété de rotation ou symétrie, j'exprime que l'un des deux vecteurs périodes est nul et j'ai trois conditions (au plus). Si le cône C admet le plan xOy pour plan de symétrie, et par suite Oz pour axe de symétrie, tout en n'ayant que deux génératrices isotropes, deux circonstances peuvent se présenter : les deux génératrices isotropes sont dans le plan xOy, ou bien sont contenues toutes deux dans un plan passant par Oz, aucune n'étant dans le plan xOy. Dans le premier cas, chaque génératrice isotrope est à elle-même sa symétrique par rapport à Oz, le vecteur période correspondant est à lui-même son symétrique par rapport à Oz, il est porté sur Oz, donc il suffit d'écrire une seule condition pour annuler les vecteurs périodes. Dans le second cas, les deux génératrices isotropes s'échangent dans une symétrie par rapport à Oz, donc les deux vecteurs périodes correspondants étant à la fois symétriques par rapport à Oz et opposés sont dans le plan xOy : il suffit de deux conditions pour annuler l'ensemble des deux vecteurs périodes. Nous donnerons des exemples précis de ces deux cas.

Si le cône C n'a que deux génératrices isotropes et coïncide avec

lui-même après une rotation de $\frac{2\pi}{m}$ autour de Oz, m étant un entier supérieur à 2 sans égalité, les deux vecteurs périodes étant d'une part opposés et d'autre part se reproduisant dans leur ensemble par une rotation de $\frac{2\pi}{m}$ autour de Oz sont nécessairement alignés sur Oz, donc il suffit encore d'une condition unique pour annuler l'ensemble des deux vecteurs périodes polaires.

Pour éviter toute objection, je fais observer que j'ai défini avec précision, en grandeur, direction et sens, le vecteur période polaire relatif à une génératrice isotrope : dans une symétrie, ou rotation, la courbe $(\mathfrak{M})$ présente une transformation rationnelle en elle-même où les génératrices isotropes s'échangent soit en elles-mêmes, soit les unes avec les autres; dans ces transformations analytiques, les circuits infinitésimaux tracés sur la surface de Riemann s'échangent dans les mêmes conditions et les sens positifs se conservent, remarque essentielle à faire pour la rigueur de ce qui précède.

Dans ce qui précède, je ne suppose rien sur la réalité ou non-réalité des éléments géométriques. Si l'équation du cône C est à coefficients imaginaires, nous obtenons des équations entre quantités imaginaires. Si le cône C est réel (au sens vulgaire) ou du moins représenté par une équation à coefficients réels (réel au sens de M. Goursat), les génératrices isotropes sont deux à deux imaginaires conjuguées, les résidus correspondants sont imaginaires conjugués; les périodes cycliques sont deux à deux imaginaires conjuguées. Donc les équations dénombrées coïncident, dans leur ensemble, avec le système des équations conjuguées; on peut donc s'arranger par un choix convenable d'inconnues pour que ces équations soient des équations à coefficients réels entre quantités réelles.

Les exemples qui suivent au Chapitre III éclaireront ce qui précède; c'est grâce à l'ensemble des considérations *a priori* qui vient d'être exposé que j'ai pu me placer dans les circonstances les plus favorables pour obtenir des exemples de courbes à torsion constante algébriques, imaginaires ou réelles, unicursales ou non.

10. Rendons-nous compte de ce qui se passe dans le cas précis où le cône C est unicursal; soit m le degré de C. La section σ est unicur-

sale, de degré m. J'écris donc :

$$\xi = \frac{P(t)}{R(t)}, \qquad \eta = \frac{Q(t)}{R(t)}, \tag{26}$$

où P, Q, R sont trois polynomes de degré m en t. Dans les formules (1), je peux supposer h, k, l remplacées par P, Q, R, d'où

$$\begin{cases} x = \tau \int \dfrac{RQ' - QR'}{P^2 + Q^2 + R^2}\, dt, \\ y = \tau \int \dfrac{PR' - RP'}{P^2 + Q^2 + R^2}\, dt, \\ z = \tau \int \dfrac{QP' - PQ'}{P^2 + Q^2 + R^2}\, dt. \end{cases} \tag{27}$$

Les génératrices isotropes sont données par l'équation $P^2 + Q^2 + R^2 = 0$ qui est de degré $2m$ et ne doit avoir que des racines multiples. Les numérateurs des fractions à intégrer sont du degré $2m - 2$ seulement; la somme des résidus est bien nulle.

Si tous les indices sont pairs, $P^2 + Q^2 + R^2$ est le carré d'un polynome entier $S(t)$ et alors la directrice sphérique du cône C se compose d'une courbe ($\mathfrak{W}$) unicursale de degré m, $c = \frac{P(t)}{S(t)}$, $c' = \frac{Q(t)}{S(t)}$, $c'' = \frac{R(t)}{S(t)}$, et de la courbe symétrique ($\mathfrak{W}'$). Il y a avantage à se servir ici de la directrice sphérique ($\mathfrak{W}$) plutôt que de la directrice plane σ: considérons, en effet, les coordonnées curvilignes employées sur la sphère :

$$\alpha = \frac{c + ic'}{1 - c''} = \frac{1 + c''}{c - ic'}, \qquad \beta = \frac{c - ic'}{1 - c''} = \frac{1 + c''}{c + ic'}. \tag{28}$$

Ici :

$$\alpha = \frac{P + iQ}{S - R} = \frac{S + R}{P - iQ}, \qquad \beta = \frac{P - iQ}{S - R} = \frac{S + R}{P + iQ}.$$

En vertu de l'identité $P^2 + Q^2 = (S + R)(S - R)$, le polynome $S - R$ a des racines communes avec $P + iQ$ et avec $P - iQ$, de sorte que les fractions α et β peuvent se simplifier, et nous écrivons

$$\alpha = \frac{f(t)}{\varphi(t)}, \qquad \beta = \frac{f_1(t)}{\varphi_1(t)}; \tag{29}$$

f et φ étant deux polynomes premiers entre eux, ainsi que f_1 et φ_1.

Si nous coupons la courbe ($\mathfrak{M}$) par un plan tangent quelconque de la sphère, le nombre des points d'intersection, égal à m, s'obtient en totalisant les racines des deux équations $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ en désignant par α_0 et β_0 les paramètres des deux génératrices de la sphère contenues dans le plan tangent. Si donc la fraction α est du degré m_1 et la fraction β du degré m_2, on a $m_1 + m_2 = m$, tandis qu'avant réduction on semblait avoir deux fractions de degré m. Si le cône C est réel, les deux fractions α et β sont de même degré, égal à $\frac{m}{2}$. Si l'on remarque que

$$c = \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}, \qquad c' = i\frac{\beta - \alpha}{1 + \alpha\beta}, \qquad c'' = \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha\beta + 1}$$

et, par suite,

$$\xi = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta - 1} = \frac{f\varphi_1 + f_1\beta}{ff_1 - \varphi\varphi_1}, \qquad \eta = i\frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta - 1} = i\frac{f_1\varphi - f\varphi_1}{ff_1 - \varphi\varphi_1},$$

on voit que l'équation $P^2 + Q^2 + R^2 = 0$ devient $(ff_1 + \varphi\varphi_1)^2 = 0$. On a exprimé automatiquement, sous la forme (29), que $P^2 + Q^2 + R^2$ est carré parfait. Sous la forme (26), on doit introduire $3m + 2$ coefficients non homogènes, avec m conditions pour exprimer que $P^2 + Q^2 + R^2$ est carré parfait; sous la forme (29), on n'a que $(2m_1 + 1) + (2m_2 + 1)$ coefficients non homogènes, nombre égal à $2m + 2$, résultat qui coïncide bien avec le premier dénombrement. Nous retiendrons que chaque indice doit être pris au double de l'ordre de multiplicité de la racine correspondante de l'équation $ff_1 + \varphi\varphi_1 = 0$. Nous verrons même plus loin que si l'on se donne, le cône C étant supposé réel, le nombre des racines de $ff_1 + \varphi\varphi_1$ avec leur degré de multiplicité, on sait exprimer explicitement les quatre polynomes f, φ, f_1, φ_1 au moyen des arbitraires strictement indépendantes.

Les exemples réels, connus avant ce Mémoire, avaient été trouvés par M. Fabry, correspondant à des cônes à deux génératrices isotropes, sans utiliser la simplification provenant de l'indicatrice sphérique; le lecteur pourra juger de l'importance de cette simplification.

Si le cône C est réel, dans le cas où les indices sont pairs, la courbe unicursale ($\mathfrak{M}$) est d'un seul tenant et fermée.

11. Supposons maintenant que tous les indices ne soient pas tous pairs, mais qu'il y en ait deux au plus qui soient impairs. En vertu de la relation $\Sigma i = 2m$, le nombre des indices impairs est pair; donc il y aura exactement deux indices impairs; en supposant, ce qui est toujours permis, que les deux valeurs de t correspondantes soient finies, on a $P^2 + Q^2 + R^2 = (t - t_1)(t - t_2)S^2(t)$; il résulte de là que c, c', c'' ne sont pas exprimés rationnellement en t, mais que si l'on écrit $\theta^2 = (t - t_1)(t - t_2)$ on pourra exprimer rationnellement t et θ au moyen d'un nouveau paramètre T auxiliaire, de sorte que la courbe c, c', c'' est néanmoins unicursale; c'est une courbe de degré $2m$ symétrique par rapport au centre de la sphère. Comme précédemment, on pourra écrire

$$\alpha = \frac{f(T)}{\varphi(T)}, \qquad \beta = \frac{f_1(T)}{\varphi_1(T)}, \tag{30}$$

la somme des degrés des deux fractions étant égale à $2m$; la seule différence avec ce qui précède est que, à chaque valeur de t, correspondent deux valeurs de θ et par suite de T échangeant c, c', c'' avec $-c, -c', -c''$, c'est-à-dire α en $\frac{-1}{\beta}$ et β en $\frac{-1}{\alpha}$. Les coordonnées d'un point de $(\mathfrak{A})$ sont exprimées rationnellement en t : la représentation de ces coordonnées en T est une représentation impropre qui fait parcourir la courbe $(\mathfrak{A})$ deux fois, mais la courbe $(\mathfrak{B})$ une seule fois.

Si le cône C est réel, les deux génératrices d'indice impair sont conjuguées, m est nécessairement impair. On peut s'arranger pour que $t_1 = -t_2 = i$, et, en posant $t = \operatorname{tang}\varphi$,

$$P^2 + Q^2 + R^2 = (1 + t^2)S^2(t),$$

$$c = \frac{\cos\varphi\, P(\operatorname{tang}\varphi)}{S(\operatorname{tang}\varphi)}, \qquad c' = \frac{\cos\varphi\, Q(\operatorname{tang}\varphi)}{S(\operatorname{tang}\varphi)}, \qquad c'' = \frac{\cos\varphi\, R(\operatorname{tang}\varphi)}{S(\operatorname{tang}\varphi)}, \tag{31}$$

en partant d'un point réel A_0 de $(\mathfrak{A})$ avec la valeur φ_0 et faisant varier φ de φ_0 à $\varphi_0 + \pi$, on décrit toute la courbe $(\mathfrak{A})$ revenant au point de départ A_0, mais aboutissant sur la courbe $(\mathfrak{B})$ au point B'_0 diamétralement opposé au point de départ B_0. La courbe $(\mathfrak{B})$ est fermée et d'un seul tenant; elle jouit de cette propriété intéressante, c'est que, si l'on prend au hasard deux points diamétralement opposés sur elle B_0 et B'_0, le circuit obtenu par une circulation réelle ou imaginaire sur

cette courbe à partir de B_0 pour aboutir à B'_0, puis par le trajet rectiligne B'_0B_0, qui ramène en B_0, a son axe nul, au sens de M. Kœnigs; ou, si l'on veut, le système des vecteurs infiniment petits mis bout à bout sur le trajet curviligne $B_0B'_0$ est équivalent à un vecteur unique $B_0B'_0$.

A la rigueur, nous pourrions dire ici que l'indicatrice sphérique des binormales est une courbe ouverte réunissant deux points diamétralement opposés de la sphère.

La surface minima (M) est double, la surface minima (M_0) a un centre.

Dans ce cas qui vient d'être étudié, je dirai que l'indicatrice sphérique ($\mathfrak{B}$) est *mixte*, pour rappeler que si c, c', c'' ne s'expriment pas rationnellement en t, ils s'expriment pourtant rationnellement au moyen d'un autre paramètre.

12. Soit maintenant le cas où les indices impairs sont en nombre supérieur à deux; ce nombre est pair. La courbe ($\mathfrak{B}$) est indécomposable de degré $2m$ double de celui de C et σ, symétrique par rapport à l'origine, mais n'est plus unicursale.

Si la courbe ($\mathfrak{A}$) est réelle, nous supposerons que le paramètre t est réel pour les points réels de ($\mathfrak{A}$), ou σ, et l'on écrira

$$(3a) \qquad P^2+Q^2+R^2=S^2(t)[(t-a_1)^2+b_1^2]\dots[(t-a_h)^2+b_h^2].$$

$S(t)$ étant un polynome à racines deux à deux imaginaires, donc de degré pair; on a donc $2m=4p+2h$ ou $m=2p+h$, le degré du cône C est de même parité que le nombre des couples d'indice impair. D'autre part, on a

$$c=\frac{P(t)}{S(t)\sqrt{[(t-a_1)^2+b_1^2]\dots[(t-a_h)^2+b_h^2]}}$$

et formules analogues pour c', c''; si donc on fait varier t de $-\infty$ à $+\infty$, de façon à décrire toute la courbe ($\mathfrak{A}$), nous suivrons par continuité la variation de c, c', c''; supposons le radical pris positivement pour une certaine valeur t_0 de t; comme il ne s'annule jamais, il reste toujours positif; le polynome $S(t)$ garde un signe constant, donc de $-\infty$ à $+\infty$ le dénominateur de c, c', c'' garde un signe constant;

si m et h sont impairs, les polynomes P, Q, R ont changé de signe lorsque la variation de t depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ a ramené au point de départ; autrement dit, l'indicatrice ($\mathfrak{w}$) se compose encore d'une courbe ouverte joignant deux points diamétralement opposés de la sphère; si nous parcourons la courbe ($\mathfrak{a}$) deux fois coup sur coup dans le même sens, nous décrivons d'abord la courbe ouverte, puis la portion symétrique : ces deux portions réunies constituent la courbe ($\mathfrak{w}$) complète, qui est d'un seul tenant.

Si maintenant m et h sont pairs, le même raisonnement montre qu'une circulation complète sur ($\mathfrak{a}$) ramène au point c, c', c'' de départ, donc l'indicatrice ($\mathfrak{w}$) se compose de deux branches séparées, symétriques l'une de l'autre, fermées chacune et d'un seul tenant; ces deux courbes sont les deux moitiés d'une même courbe algébrique.

Quelle que soit la parité de m, la surface minima (M) est double.

13. Dans le cas où le cône C est de genre non nul, il peut arriver que la directrice sphérique soit composée d'une courbe ($\mathfrak{w}$) et d'une courbe ($\mathfrak{w}'$) symétriques l'une de l'autre par rapport à l'origine et analytiquement distinctes. Dans ce cas, le degré et le genre de C sont les mêmes que ceux de ($\mathfrak{w}$); les indices des génératrices isotropes sont tous pairs, la courbe ($\mathfrak{a}$) a pour genre le genre commun de ($\mathfrak{w}$) et C. La surface minima M est simple. Ces résultats dérivent de ce que l'équation du cône est de la forme

$$(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{B}^2(x,y,z)-\mathrm{A}^2(x,y,z)=0, \tag{33}$$

où A et B désignent des polynomes homogènes en x, y, z.

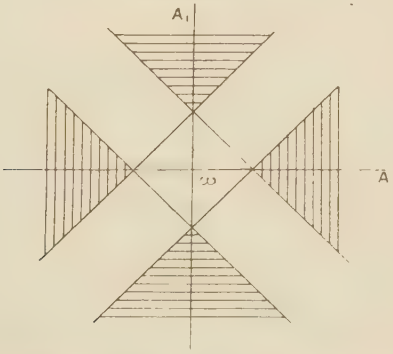
Si l'intersection de C et de la sphère $x^2+y^2+z^2=1$ se compose d'une seule courbe indécomposable analytiquement, symétrique par rapport à l'origine, le degré C est égal à la moitié du degré de ($\mathfrak{w}$), le genre commun de ($\mathfrak{a}$) et C est en général inférieur à celui de ($\mathfrak{w}$), mais il peut lui être égal, comme le prouve l'exemple des cônes unicursaux à directrice mixte; quant aux indices des cycles isotropes, des circonstances bien distinctes au point de vue de la parité sont à considérer. Il peut arriver ici que tous les indices soient pairs et que, néanmoins, la directrice sphérique ($\mathfrak{w}$) soit une courbe indécom-

sable admettant pour centre le centre de la sphère; il peut arriver qu'il y ait des génératrices isotropes d'indice impair (en nombre pair, comme nous savons). Dans le cas où il existe des génératrices isotropes d'indice impair, nous sommes certains que l'intersection de C avec la sphère se compose d'une seule courbe indécomposable. Je donne immédiatement un exemple de cône non unicursal, n'admettant que des génératrices isotropes d'indice pair, dont la directrice sphérique est une courbe indécomposable à centre. J'écris :

$$(34)\qquad \begin{cases} c+ic'=\dfrac{Aq^{4m}+A_1}{q^r}, \qquad c-ic'=\dfrac{A+A_1q^{4m}}{q^{4m-r}}, \\ c''=\dfrac{\sqrt{-AA_1q^{8m}+(1-A^2-A_1^2)q^4-AA_1}}{q^{2m}}, \end{cases}$$

où A et A_1 sont deux constantes réelles et m, r deux entiers premiers entre eux, r étant compris entre 0 et $2m$ et impair. Si l'on pose $q=e^{i\varphi}$, où φ est un nombre réel arbitraire, on voit aisément que le point c, c' est réel; pour que c'' soit réel et non imaginaire pure, tout au moins pour des valeurs de φ convenablement choisies, il faut et suffit que le point (A, A_1) dans le plan ωAA_1 ne soit pas compris dans les régions hachurées; ces régions sont les angles droits opposés par

Fig. 1.



le sommet aux angles du carré formé par les points des axes ωA et ωA_1, situés à la distance 1 de l'origine. La courbe $(\mathfrak{V})$ est du degré $2(8m-2r)$, double du degré de la courbe (c, c') et de genre $4m-1$.

A deux valeurs de q égales et de signe contraire, on peut faire correspondre deux points de $(\mathfrak{M})(c, c', c'')$ et $(-c, -c', -c'')$ diamétralement opposés, donc le cône C est du degré $8m - 2r$ seulement. Si l'on écrit

$$\lambda = \frac{c + ic'}{c''} = q^{2m-r+1} \frac{A q^{4m} + A_1}{\sqrt{q^2[-AA_1 q^{8m} + (1 - A^2 - A_1^2) q^{4m} - AA_1]}},$$

$$\mu = \frac{1}{q^{2m-r-1}} \frac{A + A_1 q^{4m}}{\sqrt{q^2[-AA_1 q^{8m} + (1 - A^2 - A_1^2) q^{4m} - AA_1]}}.$$

Si l'on pose $q^2 = Q$, on voit que la courbe (λ, μ) correspond birationnellement à la courbe $z^2 = Q[-AA_1 Q^{4m} + (1 - A^2 - A_1^2) Q^{2m} - AA_1]$ qui est de genre $2m$; le cône C n'a que deux cycles isotropes correspondant à $Q = 0$ et $Q = \infty$; chacun de ces deux cycles est d'indice $8m - 2r$, nombre pair.

Nous verrons ultérieurement que pour les cônes C réels non unicursaux conduisant à une courbe $(\mathfrak{L})$ algébrique, il peut fort bien arriver que la courbe $(\mathfrak{M})$ se compose d'un nombre arbitraire d'arcs fermés séparés les uns des autres, et la courbe $(\mathfrak{L})$ d'un même nombre d'arcs fermés aussi et séparés.

La surface M est toujours simple si l'intersection complète de C et de la sphère se décompose en deux courbes analytiquement distinctes, et double dans le cas contraire.

14. Pour terminer ces généralités, il est nécessaire d'indiquer le parti à tirer des éléments imaginaires et de préciser la notion de *réalité*.

Si l'emploi des imaginaires constitue un instrument précieux de recherches, il est bon que dans le résultat on ne trouve plus trace que d'éléments réels, j'entends par là réels au sens vulgaire de ce terme. Le plus bel exemple de l'emploi des imaginaires à ce point de vue est fourni par les surfaces minima.

Ici, les surfaces applicables sur le paraboloïde constituent une belle application des courbes à torsion constante : étant donnée une courbe réelle ou imaginaire $(\mathfrak{M})$, cette courbe définit une infinité de courbes à torsion constante homothétiques entre elles, le rapport d'homothétie étant égal au rapport des rayons de torsion. Or, si l'on prend le rayon

de torsion égal à une imaginaire pure $2i$, la courbe $(\mathcal{C})$ est nécessairement imaginaire et, jointe à la courbe conjuguée $(\mathcal{C}_1)$, permet de construire un couple de deux surfaces *réelles* S et S′ applicables sur le paraboloïde de révolution de paramètre p égal à 2. La seule différence qui se passe, entre le cas où $(\mathfrak{M})$ est imaginaire ou réelle, est que, dans le second cas, la courbe $(\mathcal{C})$ peut s'obtenir à partir d'une courbe réelle par une homothétie dont le rapport est imaginaire pure, et que les surfaces S et S′ ont un centre de symétrie, en supposant que $(\mathcal{C})$, S et S′ soient algébriques. Je renvoie le lecteur au Mémoire que je publie au *Bulletin de la Société mathématique*.

Dans ce travail, j'ai rencontré, après M. Goursat, une série d'éléments imaginaires offrant la particularité intéressante de coïncider avec l'élément conjugué : ainsi, pour les surfaces, le cône isotrope ou la sphère $x^2+y^2+z^2+1=0$ coïncident avec la surface conjuguée; pour les courbes, l'intersection de deux surfaces réelles, qui n'ont pas de points réels communs, constitue, si elle est indécomposable, un exemple de cette nature. J'ai été amené, pour simplifier le langage, à appeler ces éléments géométriques réels au sens de M. Goursat ou simplement réels $(\mathcal{G})$. Ces éléments aussi sont plutôt intéressants comme *moyen* que comme *résultat*. Dans le cas où il est besoin de spécifier, j'appelle les éléments réels au sens vulgaire, éléments réels $(\mathcal{R})$.

Or, j'ai montré que si le cône C est réel $(\mathcal{G})$, les surfaces réelles $(\mathcal{R})$ applicables sur le paraboloïde S et S′ qui lui correspondent sont encore à centre avec cette différence que pour un cône C réel $(\mathcal{R})$ le centre est un point conique non isolé de S et S′ et un point conique isolé si le cône C est réel $(\mathcal{G})$. D'ailleurs, si le cône C est réel $(\mathcal{G})$ et si la directrice sphérique de ce cône ne se décompose pas, cette courbe $(\mathfrak{M})$ est réelle $(\mathcal{G})$. Mais si la directrice sphérique du cône réel $(\mathcal{G})$ se décompose en deux courbes symétriques $(\mathfrak{M})$ et $(\mathfrak{M}')$, deux cas peuvent se présenter : $(\mathfrak{M})$ peut être à elle-même sa conjuguée, autrement dit est réelle $(\mathcal{G})$, ou bien $(\mathfrak{M})$ est conjuguée de $(\mathfrak{M}')$, de sorte que cette fois, même au sens de M. Goursat, $(\mathfrak{M})$ et $(\mathfrak{M}')$ ont cessé complètement d'être réelles.

Il est bon de voir ce que l'on obtient exactement au point de vue de la réalité pour les surfaces minima (M) et (M_0) associées aux courbes

à torsion constante. Il est bien clair que toute courbe sphérique réelle (ν) donne une courbe $(\mathcal{L})$, une surface minima (M), et la surface adjointe (M_0) toutes réelles (ν) si le nombre τ est réel. Mais qu'arrive-t-il si le cône C est simplement réel $(\mathcal{G})$? Dans ce cas, il est facile de voir qu'en prenant τ réel, on peut, si la courbe $(\mathcal{L})$ est *algébrique*, obtenir une courbe $(\mathcal{L})$ réelle $(\mathcal{G})$; si la directrice sphérique de C est indécomposable, ou si elle se décompose en deux courbes symétriques, réelles (G) séparément, la surface (M) et la surface (M_0) sont réelles (ν); c'est là le résultat intéressant à noter.

Prenons d'abord la courbe $(\mathcal{L})$; je considère la section σ de C par le plan $z = 1$; c'est une courbe réelle $(\mathcal{G})$, et j'écris les formules déterminant x, y, z sur la courbe $(\mathcal{L})$;

$$(36)\qquad \begin{cases} x = \tau \displaystyle\int_{P_0}^{P} \frac{d\eta}{1+\xi^2+\eta^2} + \alpha, \\ y = \tau \displaystyle\int_{P_0}^{P} \frac{-d\xi}{1+\xi^2+\eta^2} + \beta, \\ z = \tau \displaystyle\int_{P_0}^{P} \frac{\eta\, d\xi - \xi\, d\eta}{1+\xi^2+\eta^2} + \gamma; \end{cases}$$

P_0 étant un point fixe de σ, P un point variable; α, β, γ sont trois constantes pour l'instant arbitraire que nous déterminerons ultérieurement. En écrivant que les coordonnées du point de $(\mathcal{L})$, obtenu en remplaçant P par le point conjugué P′, coïncident avec les conjuguées de x, y, z, on a manifestement, en appelant α', β', γ' les conjuguées de α, β, γ et P_0', la conjuguée de P_0 :

$$\tau \int_{P_0'}^{P'} \frac{d\eta}{1+\xi^2+\eta^2} + \alpha' = \tau \int_{P_0}^{P'} \frac{d\eta}{1+\xi^2+\eta^2} + \alpha$$

ou

$$\alpha' - \alpha = \tau \int_{P_0}^{P_0'} \frac{d\eta}{1+\xi^2+\eta^2}$$

et égalités analogues pour $\beta' - \beta$ et $\gamma' - \gamma$. Ces égalités sont possibles, précisément parce que les seconds membres sont des imaginaires pures, comme on s'en aperçoit en remarquant que l'inversion des limites, pourvu que l'intégrale indéfinie soit algébrique, revient

indifféremment à changer l'intégrale de signe ou à la remplacer par l'intégrale conjuguée. Et alors la partie imaginaire de α, β, γ est complètement déterminée; la partie réelle est arbitraire, ce qui correspond à une translation réelle. Nous pourrons donc prendre

$$(37)\qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\tau}{2}\displaystyle\int_{P_0'}^{P_0} \frac{d\eta}{1+\xi^2+\eta^2}, \\ \beta = \dfrac{\tau}{2}\displaystyle\int_{P_0'}^{P_0} \frac{-d\xi}{1+\xi^2+\eta^2}, \\ \gamma = \dfrac{\tau}{2}\displaystyle\int_{P_0'}^{P_0} \frac{\eta\, d\xi - \xi\, d\eta}{1+\xi^2+\eta^2}. \end{cases}$$

Cela posé, pour définir la surface minima (M), je dois d'abord considérer la courbe minima

$$(\mathfrak{M})\qquad x - ci\tau,\quad y - c'i\tau,\quad z - c''i\tau;$$

puis la courbe minima

$$(\mathfrak{M}')\qquad x + ci\tau,\quad y + c'i\tau,\quad z + c''i\tau,$$

et prendre le milieu des cordes qui joignent au point de la première à un point de la deuxième.

Si l'intersection du cône C avec la sphère ne se décompose pas, ces deux courbes ne sont pas analytiquement distinctes; nous avons dit qu'en effet dans ce cas la surface (M) est double. J'associerai alors les points provenant de P et P′ respectivement, à savoir $(x - ci\tau, y - c'i\tau, z - c''i\tau)$ d'une part et $(x_1 + c_1 i\tau, y_1 + c_1' i\tau, z_1 + c_1'' i\tau)$ de l'autre, points évidemment conjugués, de sorte que la surface minima (M) est réelle (ρ). Si, au contraire, la directrice sphérique de C se décompose en une courbe sphérique $(\mathfrak{w})$ et la courbe symétrique $(\mathfrak{w}')$, les deux courbes $(\mathfrak{M})$ et $(\mathfrak{M}')$ sont analytiquement distinctes, la surface (M) est simple. Portons sur σ du point P et suivons par continuité la variation de c, c', c''; quand nous arrivons en P′, c, c', c'' sont devenues soit c_1, c_1', c_1'' conjuguées de c, c', c'' si la courbe $(\mathfrak{w})$ est à elle-même sa conjuguée, soit $-c_1, -c_1', -c_1''$ si la conjuguée de $(\mathfrak{w})$ est $(\mathfrak{w}')$. Dans le premier cas, le point de $(\mathfrak{M})$ correspondant à $\mathfrak{P}$ et le point de $(\mathfrak{M}')$

correspondant à $\mathfrak{P}'$ sont $x - ci\tau$, $y - c'i\tau$, $z - c''i\tau$ d'une part; $x_1 + c_1 i\tau$, $y + c_1' i\tau$, $z + c_1'' i\tau$, et cela montre bien que la surface (M) est réelle (ν). Les circonstances sont différentes dans le second cas, car la courbe minima ($\mathfrak{M}$) contient alors le point $x - ci\tau$, $y - c'i\tau$, $z - c''i\tau$ correspondant à $\mathfrak{P}$ et le point $x_1 + c_1 i\tau$, $y_1 + c_1' i\tau$, $z_1 + c_1'' i\tau$ correspondant à $\mathfrak{P}_1$; la courbe ($\mathfrak{M}$) admet pour conjuguée elle-même et non plus ($\mathfrak{M}'$), de sorte que la surface (M) est imaginaire. Quant à la surface (M_0) étant l'adjointe de (M), elle est réelle (ν) ou imaginaire en même temps que (M).

Cette surface (M_0) est circonscrite à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = \tau^2$ le long de la courbe τc, $\tau c'$, $\tau c''$ homothétique de ($\mathfrak{w}$). De même qu'une surface réelle du second degré peut être circonscrite à une sphère le long d'un cercle imaginaire, mais réel ($\mathfrak{G}$), une surface minima algébrique réelle peut, dans certains cas, être inscrite à une sphère le long d'une courbe réelle ($\mathfrak{G}$). Ce point était intéressant à élucider. Dans mon travail sur la paraboloïde, j'ai donné des exemples précis des divers cas étudiés ici; j'en indiquerai d'autres dans le cours de ce Mémoire même.

15. Avant de passer aux exemples, je résume les diverses formules qui me seront nécessaires :

Section du cône C par le plan $z = 1$:

$$\xi = \frac{c}{c''}, \qquad \eta = \frac{c'}{c''}, \qquad \lambda = \frac{c + ic'}{c''}, \qquad \mu = \frac{c - ic'}{c''};$$

Indicatrice (B) :

$$c + ic' = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda\mu}}, \qquad c - ic' = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \lambda\mu}}, \qquad c'' = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda\mu}};$$

Courbe (A) :

$$x + iy = -\tau i \int \frac{d\lambda}{1 + \lambda\mu}, \qquad x - iy = \tau i \int \frac{d\mu}{1 + \lambda\mu}, \qquad 2z = -\tau i \int \frac{\lambda\, d\mu - \mu\, d\lambda}{1 + \lambda\mu}.$$

Si l'on emploie les coordonnées α et β sur la sphère de rayon 1, on a :

$$
(38)\quad \left\{\begin{array}{llll}
\alpha=\dfrac{c+ic'}{1-c''}=\dfrac{1+c''}{c-ic'}, & & \beta=\dfrac{c-ic'}{1-c''}=\dfrac{1+c''}{c+ic'}; & \\
c+ic'=\dfrac{2\alpha}{1+\alpha\beta}, & c-ic'=\dfrac{2\beta}{1+\alpha\beta}, & c''=\dfrac{\alpha\beta-1}{\alpha\beta+1}; & \\
x+iy=2\tau i\displaystyle\int\dfrac{d\alpha+\alpha^2\,d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}, & & c+ic'=2\displaystyle\int\dfrac{d\alpha-\alpha^2\,d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}; & \\
x-iy=-2\tau i\displaystyle\int\dfrac{d\beta+\beta^2\,d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}, & & c-ic'=2\displaystyle\int\dfrac{d\beta-\beta^2\,d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}; & \\
z=2\tau i\displaystyle\int\dfrac{\beta\,d\alpha-\alpha\,d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}, & & c''=2\displaystyle\int\dfrac{\beta\,d\alpha+\alpha\,d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}. &
\end{array}\right.
$$

La comparaison des trois intégrales donnant $x+iy$, $x-iy$, z avec les expressions des différentielles algébriques $d(c+ic')$, $d(c-ic')$, dc'' montre que l'on peut, si l'on veut, prendre au hasard une intégrale et une seule dans chaque colonne :

$$
(39)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\displaystyle\int\frac{d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}, & \displaystyle\int\frac{d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}, & \displaystyle\int\frac{\beta\,d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}; \\
\displaystyle\int\frac{\alpha^2\,d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}, & \displaystyle\int\frac{\beta^2\,d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}, & \displaystyle\int\frac{\alpha\,d\beta}{(1+\alpha\beta)^2},
\end{array}\right.
$$

et exprimer que ces trois intégrales sont algébriques. Cela revient d'ailleurs à écrire des formules, utiles pour l'intégration :

$$
(40)\quad \left\{\begin{array}{llll}
\dfrac{y-ix}{\tau}+c+ic'=4\displaystyle\int\dfrac{d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}, & & \dfrac{y-ix}{\tau}-(c+ic')=4\displaystyle\int\dfrac{\alpha^2\,d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}; & \\
\dfrac{y+ix}{\tau}+c-ic'=4\displaystyle\int\dfrac{d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}, & & \dfrac{y+ix}{\tau}-(c-ic')=4\displaystyle\int\dfrac{\beta^2\,d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}; & \\
\dfrac{iz}{\tau}+c''=4\displaystyle\int\dfrac{\alpha\,d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}, & & \dfrac{-iz}{\tau}+c''=4\displaystyle\int\dfrac{\beta\,d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}. &
\end{array}\right.
$$

Dans le cas où la réalité de la courbe (36) ne joue pas un rôle essentiel, on pourra employer avec fruit les coordonnées sphériques (u, v)

à (α, β) par les relations $u = \alpha$, $v = \frac{-1}{\beta}$ qui donnent :

$$(41)\quad \left\{\begin{array}{llll} u = \dfrac{c+ic'}{1-c''} = \dfrac{1+c''}{c-ic'}, & & v = -\dfrac{1-c''}{c-ic'} = -\dfrac{c+ic'}{1+c''}; & \\ c+ic' = \dfrac{-2uv}{u-v}, & c-ic' = \dfrac{2}{u-v}, & c'' = \dfrac{u+v}{u-v}; & \\ x+iy = 2i\tau\displaystyle\int\frac{v^2\,du+u^2\,dv}{(u-v)^2}, & & c+ic' = 2\displaystyle\int\frac{v^2\,du-u^2\,dv}{(u-v)^2}; & \\ x-iy = -2i\tau\displaystyle\int\frac{du+dv}{(u-v)^2}, & & c-ic' = -2\displaystyle\int\frac{du-dv}{(u-v)^2}; & \\ z = -2i\tau\displaystyle\int\frac{v\,du+u\,dv}{(u-v)^2}, & & c'' = -2\displaystyle\int\frac{v\,du-u\,dv}{(u-v)^2}. & \end{array}\right.$$

Les colonnes analogues à (39) sont :

$$(42)\quad \left\{\begin{array}{lll} \displaystyle\int\frac{du}{(u-v)^2}, & \displaystyle\int\frac{v\,du}{(u-v)^2}, & \displaystyle\int\frac{v^2\,du}{(u-v)^2}; \\ \displaystyle\int\frac{dv}{(u-v)^2}, & \displaystyle\int\frac{u\,dv}{(u-v)^2}, & \displaystyle\int\frac{u^2\,dv}{(u-v)^2}. \end{array}\right.$$

On aura donc :

$$(43)\quad \left\{\begin{array}{llll} \dfrac{y-ix}{\tau}+c+ic' = 4\displaystyle\int\frac{v^2\,du}{(u-v)^2}, & & \dfrac{y-ix}{\tau}-(c+ic') = 4\displaystyle\int\frac{u^2\,dv}{(u-v)^2}; & \\ \dfrac{y+ix}{\tau}+c-ic' = 4\displaystyle\int\frac{dv}{(u-v)^2}, & & \dfrac{y+ix}{\tau}-(c-ic') = 4\displaystyle\int\frac{du}{(u-v)^2}; & \\ \dfrac{iz}{\tau}+c'' = 4\displaystyle\int\frac{u\,dv}{(u-v)^2}, & & \dfrac{iz}{\tau}-c'' = 4\displaystyle\int\frac{v\,du}{(u-v)^2}. & \end{array}\right.$$

Enfin on se rappellera que le déplacement *réel* le plus général de la courbe $(\mathfrak{M})$ à la surface de la sphère revient à la même substitution homographique $u_1 = \dfrac{mu+n}{-n_0u+m_0}$, $v_1 = \dfrac{mv+n}{-n_0v+m_0}$, effectuée sur u et v, m et n désignant deux constantes dont m_0 et n_0 sont les conjuguées. Quand il s'agit de courbes imaginaires, on peut appliquer à la courbe $(\mathfrak{M})$ la substitution plus générale $u_1 = \dfrac{mu+n}{pu+q}$, $v_1 = \dfrac{mv+n}{pv+q}$ qui fait correspondre à une courbe $(\mathfrak{L})$ algébrique une autre courbe $(\mathfrak{L}_1)$ algébrique ; cette nouvelle substitution, au lieu de ne dépendre que de trois paramètres réels, comme celle qui précède, dépend de six para-

mètres réels; elle revient à la composition de la substitution correspondant au déplacement réel avec la substitution $u_1 = \lambda u + \mu + \nu i$, $v_1 = \lambda v + \mu + \nu i$, où λ, μ, ν sont trois constantes réelles; les deux substitutions peuvent être effectuées successivement dans un ordre arbitraire, à condition de donner des valeurs convenables aux coefficients. De la sorte, à une surface S algébrique réelle applicable sur le paraboloïde correspondent toute une série de nouvelles surfaces algébriques et réelles applicables sur le même paraboloïde, obtenues en faisant varier λ, μ, ν qui sont alors des paramètres de *forme* et non plus des paramètres de *déplacement*.

CHAPITRE III.

EXEMPLES DIVERS DE COURBES ALGÉBRIQUES, UNICURSALES, IMAGINAIRES ET RÉELLES.

Nous pouvons dès maintenant donner de nombreux exemples obtenus par des cônes C, réels ou imaginaires, à directrice sphérique unicursale ou mixte. Ces exemples seront nécessaires pour rendre intuitives les lois relatives à la symétrie ou à la rotation ainsi que certaines transformations qui seront étudiées au Chapitre suivant, de façon à construire sans peine les exemples plus compliqués correspondant aux cônes unicursaux à directrice sphérique non unicursale, puis aux courbes à torsion constante de genre non nul.

1. Je commence par divers exemples imaginaires. Nous avons vu que si le cône unicursal C n'a qu'une génératrice isotrope, la courbe (Λ) est algébrique et unicursale. Il est bien clair que C et (Λ) sont imaginaires; m étant le degré du cône C, l'indice de la génératrice isotrope est $2m$, nombre pair, donc la directrice $(\mathfrak{D})$ est unicursale, de degré m; nous supposerons le paramètre t choisi de façon que la génératrice isotrope corresponde à $t = \infty$; la directrice $(\mathfrak{D})$ est définie

par les équations

$$u = \frac{A}{B}, \qquad v = \frac{C}{D}, \tag{1}$$

où A, B, C, D sont quatre polynomes entiers en t tels que l'équation $u - v = 0$ ou $AD - BC = 0$ n'ait qu'une racine, d'ailleurs infinie ; donc $AD - BC$ se réduit à une constante, à qui l'on peut donner telle valeur que l'on voudra, puisque l'on peut multiplier A et B par un même facteur numérique. Nous écrivons donc

$$AD - BC = 1. \tag{2}$$

C'est l'identité célèbre dite *identité de Bezout ;* à toute solution de cette identité correspond une courbe (C) algébrique imaginaire et par suite deux surfaces réelles applicables sur le paraboloïde. J'ai montré (*Comptes rendus*, janvier 1917, et *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1919) que l'on peut donner sans calcul l'expression explicite des quatre polynomes A, B, C, D.

Les intégrations se font immédiatement ; on a, en effet, et cela justifie la théorie,

$$\left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\int \frac{du}{(u-v)^2} = \int (BA' - AB')D^2\, dt, & \displaystyle\int \frac{dv}{(u-v)^2} = \int (DC' - CD')B^2\, dt; \\ \displaystyle\int \frac{v\, du}{(u-v)^2} = \int (BA' - AB')CD\, dt, & \displaystyle\int \frac{u\, dv}{(u-v)^2} = \int (DC' - CD')AB\, dt; \\ \displaystyle\int \frac{v^2\, du}{(u-v)^2} = \int (BA' - AB')C^2\, dt, & \displaystyle\int \frac{u^2\, dv}{(u-v)^2} = \int (DC' - CD')A^2\, dt. \end{array}\right. \tag{3}$$

L'arc de l'indicatrice des torsions s'obtient aisément en se rappelant que sur la sphère on a $ds^2 = \frac{4\, du\, dv}{(u-v)^2}$, on a donc pour élément d'arc de l'indicatrice

$$2\, dt \sqrt{(BA' - AB')(DC' - CD')};$$

l'arc de la courbe (C) a pour élément le produit de l'élément précédent par τ. Je signale en passant que ceci est l'interprétation d'une remarque que M. Lyon a faite sur les simplifications qui se produisent en calculant l'arc d'une courbe algébrique à torsion constante ; cette simplification a lieu chaque fois que l'intersection du cône C avec la sphère

se décompose, car la courbe $(\mathfrak{A})$ est en général de degré supérieur à celui du cône C (*voir* Chap. II, § 6).

Nous avons donc des courbes et des surfaces de degré aussi grand que l'on veut, en nombre infini. Essayons de les classer. Nous savons que l'on peut effectuer sur u et v une même substitution

$$u_1 = \frac{mu + n}{-n_0 u + m_0}, \qquad v_1 = \frac{mv + n}{-n_0 v + m_0},$$

où m et m_0 sont imaginaires conjuguées ainsi que n et n_0, correspondant à un déplacement autour de l'origine de toute la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Je profite de cette substitution pour supposer B de degré inférieur à A, ce qui revient à supposer que l'unique génératrice isotrope de C est la droite $z = 0$, $x - iz = 0$. Nous supposons donc A de degré p, B de degré $p - h$, où h est un entier au moins égal à 1. On peut trouver un polynome C_1 et un seul de degré $p - 1$ au plus, un polynome D_1 et un seul de degré $p - h - 1$ au plus tels que $AD_1 - BC_1 \equiv 1$ et l'on a

$$C \equiv C_1 + AQ, \qquad D \equiv D_1 + BQ,$$

où Q est un polynome arbitraire, pouvant se réduire à une constante ou même à zéro. On écrit donc

$$(4) \qquad u = \frac{A}{B}, \qquad v = \frac{C_1 + AQ}{D_1 + BQ}.$$

Si Q n'est pas identiquement nul, la fraction v est de degré au moins égal à celui de u ; nous pouvons toujours supposer qu'il en est ainsi, sinon on échange u avec v, ce qui ne change pas le cône C, puisque cela revient à remplacer la courbe $(\mathfrak{B})$ par la courbe symétrique par rapport à l'origine. Le degré de Q étant égal à d, le cône C et la courbe $(\mathfrak{B})$ sont du degré $2p + d$; le cycle isotrope unique a pour indice $2(2p + d)$, pour degré et classe h ; il en résulte que le degré de $(\mathfrak{A})$, soit M, est égal à $4p + 2d - h$. Si l'on remarque que $p > h$ entraîne $4p + 2d - h \geq 3p + 2d$, où voit que les degrés minimum de C et $(\mathfrak{A})$ sont respectivement 2 et 3 obtenus pour $d = 0$, $p = 1$, ce qui entraîne $h = 1$. Nous reviendrons sur ce cas.

Remarquons que le nombre $M = 4p + 2d - h$ peut être rendu égal

à un nombre quelconque égal ou supérieur à 3, les nombres 4 et 6 exceptés. Pour obtenir $M = 4$, il faudrait avoir $4 \geq 3p + 2d \geq 3p$ et p ne pourrait avoir que la valeur 1, d que la valeur 0, ce qui entraîne $h = 1$ et $M = 3$ et non pas $M = 4$. Ce cas écarté, si M est pair, h est nécessairement pair et entre autres solutions on pourra adopter $h = 2$, $2p + d = \frac{M}{2} + 1$, autrement dit p entier quelconque compris entre 2 et $\frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} + 1\right)$. Si M est impair, on pourra adopter $h = 1$, $2p + d = \frac{M+1}{2}$. Pour avoir $M = 6$, on a d'abord $6 \geq 3p + 2d$; or h étant pair et non nul, h est au moins égal à 2, p est au moins égal à h, c'est-à-dire à 2, on a donc $p = 2$, $d = 0$, $h = 2$; mais $d = 0$, $p = h$ donne simplement pour u et v deux polynomes entiers dont la différence est constante, autrement dit on retrouve la cubique de M. Lyon avec une représentation impropre, donc $M = 6$ est lui-même impossible ici.

Revenons donc à $p = 1$, $h = 1$, $d = 0$; cela revient à supposer que les deux numérateurs A et C sont du premier degré et les deux dénominateurs sont du dégré zéro; u et v sont donc deux binomes du premier degré en t dont la différence est constante. Je vais donc faire un changement de paramètre qui me donnera des formules plus simples; l'expression $\frac{u+v}{2}$ est, elle aussi, un binome du premier degré que je prends pour paramètre; je l'appelle t et j'ai $u = t + k$, $v = t - k$, où k est une constante réelle ou imaginaire. En faisant tourner les axes autour de Oz, on multiplie u et v par $e^{i\alpha}$, je peux encore remplacer $te^{i\alpha}$ par t, et j'ai $u = t + ke^{i\alpha}$, $v = t - ke^{i\alpha}$; je peux donc profiter de l'indéterminée α pour supposer k réel, et même positif si je veux. J'ai donc, avec un seul paramètre k réel,

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} u = t + k, \qquad v = t - k; \\ c = \dfrac{1 + k^2 - t^2}{2k}, \qquad c' = i\dfrac{1 - k^2 + t^2}{2k}, \qquad c'' = \dfrac{t}{k}; \\ x = \dfrac{i\tau}{2k^2}\left[\dfrac{t^3}{3} + (k^2 - 1)t\right], \quad y = \dfrac{\tau}{2k^2}\left[\dfrac{t^3}{3} + (k^2 + 1)t\right], \quad z = \dfrac{-\tau t^2}{2k^2}. \end{array}\right.$$

On obtient ainsi une cubique à torsion constante. Elle ne renferme, en dehors des paramètres correspondant au déplacement le plus général, qu'un paramètre τ de grandeur, correspondant à une homo-

thétie et que le paramètre réel k; ce paramètre k est le seul intéressant. C'est un paramètre de forme. J'ai étudié en détail cette cubique et les surfaces applicables sur le paraboloïde qui en dérivent. J'ai tenu à bien insister sur ce fait que la cubique de M. Lyon ne renferme, en dehors des sept paramètres les plus généraux de similitude, qu'un paramètre de forme ; M. Fabry l'a lui aussi signalé. Comme $c - ic'$ est une constante $\frac{1}{k}$, l'élément d'arc de $(\mathfrak{B})$ se réduit à dc'', celui de $(\mathfrak{L})$ à $\tau dc''$; l'arc de $(\mathfrak{L})$ est donc égal à $\frac{\tau t}{k}$, il est rectifiable. L'indicatrice des courbures est la courbe

$$a = \frac{i}{2k}(t^2 + k^2 - 1), \qquad a' = \frac{t^2 + k^2 + 1}{2k}, \qquad a'' = \frac{-it}{k},$$

courbe qui se déduit de l'indicatrice des torsions en remplaçant k par ik; cette indicatrice est donc égale à la précédente, elle s'en déduit par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de Oz; comme précédemment, puisque $a - ia' = \frac{-i}{k}$, l'arc de cette indicatrice a pour élément da'' ou $\frac{-i dt}{k}$; il en résulte que le rayon de courbure de la cubique est égal à $i\tau$; il est, lui aussi, constant.

2. Voici maintenant un autre exemple qui généralise celui du numéro précédent :

$$(6)\quad \begin{cases} u = t^{\alpha}(t-a_1)^{\alpha_1}\dots(t-a_h)^{\alpha_h}(t-b_1)^{2\beta_1+1}\dots(t-b_k)^{2\beta_k+1}\dfrac{A(t)}{B(t)}, \\ v = t^{2\alpha+1}(t-a_1)^{2\alpha_1+1}\dots(t-a_h)^{2\alpha_h+1}(t-b_1)^{\beta_1}\dots(t-b_k)^{\beta_k}\dfrac{C(t)}{D(t)}; \end{cases}$$

A, B, C, D sont des polynomes entiers en t ; les a et b sont des constantes réelles ou imaginaires, les α et β sont des entiers positifs non nuls. On a

$$(7)\quad u - v = t^{\alpha}(t-a_1)^{\alpha_1}\dots(t-a_h)^{\alpha_h}(t-b_1)^{\beta_1}\dots(t-b_k)^{\beta_k} \times\left[(t-b_1)^{\beta_1+1}\dots(t-b_k)^{\beta_k+1}\frac{A}{B} - t^{\alpha+1}\dots(t-a_h)^{\alpha_h+1}\frac{C}{D}\right].$$

On détermine les polynomes A, B, C, D par l'identité

$$(8)\qquad (t-b_1)^{\beta_1+1}\dots(t-b_h)^{\beta_h+1}\mathrm{AD}-t^{\alpha+1}\dots(t-a_h)^{\alpha_h+1}\mathrm{BC}\equiv 1.$$

On a supposé les nombres $0,\ a_1-a_h,\ b_1,\ \dots,\ b_k$ tous distincts les uns des autres ; pour résoudre l'identité (8) on peut se donner arbitrairement les a et b, le polynome A et le polynome C et alors B et D se calculent par application de l'identité de Bezout ; on peut même supposer que A admet quelques-uns des facteurs $(t-b_i)$ à un exposant quelconque, que C admet l'un des facteurs t ou $t-a_j$ à un exposant quelconque, mais on suppose que ni B ni D n'admettent les facteurs $t-a_j$, $t-b_i$ ou t.

Dans ces conditions, pour $t=a_j$, on a un cycle isotrope porté par la droite $x+iy,\ z=0$, de degré α_j exactement, de classe $2\alpha_j+1$ si C n'admet pas le facteur $t-a_j$, de classe égale, si C admet ce facteur, à la somme de $2\alpha_j+1$ et de l'exposant de $t-a_j$ dans C ; l'indice du cycle est $2\alpha_j$. Nous savons que ces conditions suffisent pour que le vecteur période polaire relatif à $t-a_j$ soit nul. Pour $t=b_i$, mêmes résultats : cycle isotrope porté par la même droite $x+iy=0,\ z=0$, de degré β_i, de classe égale à $2\beta_i+1$ si A n'est pas divisible par $t-b_i$, de classe supérieure à $2\beta_i+1$ si A est divisible par $t-b_i$; l'indice est $2\beta_i$. Nous avons ainsi $h+k+1$ cycles tous portés par la même génératrice isotrope ; h et k peuvent d'ailleurs être nuls. En dehors de ces cycles, il n'y a plus, en vertu de l'identité (8) que le cycle correspondant à $t=\infty$. Puisque tous les autres vecteurs périodes sont nuls, le vecteur relatif à $t=\infty$ est donc nul aussi, la courbe $(\mathcal{A})$ est donc algébrique et unicursale. Si l'on a l'inégalité

$$\text{degré B} < \text{degré A}+\alpha+\alpha_1+\dots+\alpha_h+(2\beta_1+1)+\dots+(2\beta_k+1),$$

le cycle $t=\infty$ est porté par la droite $x=iy=0,\ z=0$ conjuguée de la première ; si l'inégalité est renversée, le cycle $t=\infty$ est porté lui aussi par la première droite ; si l'inégalité est remplacée par une égalité, la droite isotrope support du cycle $t=\infty$ peut être une droite isotrope quelconque.

Nous remarquerons d'ailleurs que le procédé indiqué pour résoudre l'identité (8) fait intervenir comme intermédiaire un certain poly-

nome B_1 de degré au plus égal à

$$\text{degré } A + (\beta_1 + 1) + (\beta_2 + 1) + \ldots + (\beta_k + 1) - 1,$$

de sorte qu'il existe effectivement des polynomes B correspondant à l'un quelconque des trois cas qui viennent d'être envisagés. Tous les cônes C ou toutes les courbes $(\mathcal{C})$ de ce type sont imaginaires ; les cônes C ont deux génératrices isotropes, pouvant être confondues, dont l'une porte un nombre de cycles égal à un entier quelconque au moins égal à 1.

3. Je peux encore généraliser, toujours en courbes imaginaires, en écrivant

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{u}{Ku+1} = \dfrac{t^{\alpha}\ (t-a_1)^{\alpha_1}\ldots\ldots\ldots(t-a_h)^{\alpha_h}\quad (t-b_1)^{2\beta_1+1}\ldots(t-b_k)^{2\beta_k+1}}{(t-1)^{\gamma}\quad (t-c_1)^{\gamma_1}\quad\ldots(t-c_l)^{\gamma_l}\quad (t-d_1)^{2\delta_1+1}\ldots(t-d_m)^{2\delta_m+1}}\ \dfrac{A(t)}{B(t)} \\ \dfrac{v}{Kv+1} = \dfrac{t^{2\alpha+1}(t-a_1)^{2\alpha_1+1}\ldots\ldots(t-a_h)^{2\alpha_h+1}(t-b_1)^{\beta_1}\quad\ldots(t-b_k)^{\beta_k}}{(t-1)^{2\gamma+1}(t-c_1)^{2\gamma_1+1}\ldots(t-c_l)^{2\gamma_l+1}(t-d_1)^{\delta_1}\quad\ldots(t-d_m)^{\delta_m}}\ \dfrac{C(t)}{D(t)} \end{cases}$$

Comme précédemment, A, B, C, D sont des polynomes entiers en t ; les a sont des constantes réelles ou imaginaires dont le nombre est l'entier h positif ou nul ; même définition pour les constantes b, c, d et les entiers k, l, m ; K est une constante réelle finie.

Nous pouvons, comme nous l'avons remarqué en fin du Chapitre II, effectuer sur (u, v) la substitution homographique $U = \dfrac{u}{Ku+1}$, $V = \dfrac{v}{Kv+1}$, de sorte que nous raisonnerons sur la courbe (U, V), on a

$$(11)\quad U - V = \frac{t^{\alpha}(t-a_1)^{\alpha_1}\ldots(t-a_h)^{\alpha_h}(t-b_1)^{\beta_1}\ldots(t-b_k)^{\beta_k}}{(t-1)^{\gamma}(t-c_1)^{\gamma_1}\ldots(t-c_l)^{\gamma_l}(t-d_1)^{\delta_1}\ldots(t-d_m)^{\delta_m}} \times \left| \frac{(t-b_1)^{\beta_1+1}\ldots(t-b_k)^{\beta_k+1}}{(t-d_1)^{\delta_1+1}\ldots(t-d_m)^{\delta_m+1}}\ \frac{A}{B} - \frac{t^{\alpha+1}(t-a_1)^{\alpha_1+1}\ldots(t-a_h)^{\alpha_h+1}}{(t-1)^{\gamma+1}(t-c_1)^{\gamma_1+1}\ldots(t-c_l)^{\gamma_l+1}}\ \frac{C}{D} \right|.$$

On détermine A, B, C, D de façon à avoir l'identité

$$(12)\quad (t-b_1)^{\beta_1+1}\ldots(t-b_k)^{\beta_k+1}(t-1)^{\gamma+1}\ldots(t-c_l)^{\gamma_l+1}AD - t^{\alpha+1}(t-a_1)^{\alpha_1+1}\ldots(t-a_h)^{\alpha_h+1}(t-d_1)^{\delta_1+1}\ldots(t-d_m)^{\delta_m+1}BC = 1.$$

On se donne arbitrairement, par exemple, les a, b, c; d et les deux polynomes A et C, l'identité donnera B et D. Le cône C relatif à (a, c) a alors trois génératrices isotropes, à savoir :

1° La génératrice $\mathcal{G}x + iy = 0$, $z = 0$ portant les cycles relatifs à $t = 0$, $a_1, \ldots, a_h$, $b, \ldots, b_k$ en nombre $h + k + 1$, le vecteur période étant nul pour chacun ;

2° La génératrice $\mathcal{G}' \dfrac{x + iy}{1} = \dfrac{x - iy}{-k^2} = \dfrac{z}{k}$ portant les cycles relatifs à $t = 1, c_1, \ldots, c_l, d_1, \ldots, d_m$ en nombre $l + m + 1$, le vecteur période étant nul aussi pour chacun ;

3° La génératrice $\mathcal{G}''$ correspond à $t = \infty$, ne portant qu'un cycle isotrope ; le vecteur période de ce dernier cycle est nécessairement nul.

On peut remarquer que si les deux termes de la fraction $\dfrac{u}{\mathrm{K}u + 1}$ ne sont pas du même degré en t, cette troisième génératrice $\mathcal{G}''$ coïncide avec l'une des deux précédentes. La vérification par le calcul de toutes les propriétés annoncées ne fait aucune difficulté. Les hypothèses faites ont servi à n'introduire que les paramètres essentiels, à nous débarrasser des paramètres correspondant à un déplacement réel ou à une substitution homographique sur t : La droite perpendiculaire au plan de la droite G et de la droite conjuguée a été prise comme axe des z, la droite de même définition relative à G′ détermine avec Oz un plan qui a été pris pour plan zOx. Enfin, on a pris pour trois cycles distincts du cône C les valeurs de t égales respectivement à 0, 1, ∞.

Les exemples traités dans ces trois paragraphes donnent des surfaces algébriques réelles applicables sur le paraboloïde, offrant des propriétés intéressantes dans certains cas, relativement aux symétries planes ou aux points à l'infini.

4. Je vais maintenant démontrer une propriété commune aux courbes, réelles ou imaginaires, unicursales : il n'existe pas de courbe unicursale à torsion constante pour laquelle le cône C n'aurait que des génératrices isotropes d'indice 2. Pour un cône unicursal de degré m n'ayant que des génératrices isotropes d'indice 2, on pourrait repré-

senter la directrice (Ub) de degré m aussi par les équations

$$u = \frac{f_1(t)}{\varphi_1(t)}, \qquad v = \frac{f_2(t)}{\varphi_1(t)},$$

où la fraction u est de degré m_1, la fraction v de degré m_2 avec $m_1 + m_2 = m$. S'il existe un cycle isotrope d'indice 2, correspondant à $t = t_0$, et si la courbe (Ub) est algébrique, l'une des deux équations $u = u_0$, $v = v_0$ admet $t = t_0$ pour racine simple et l'autre pour racine triple au moins; supposons que $v = v_0$ est l'équation qui a t_0 pour racine simple, $u = u_0$ l'équation qui a t_0 pour racine triple (ceci, je le fais remarquer incidemment, exige que la fraction u soit du troisième degré au moins en t, donc que le cône C soit du quatrième degré au moins). On déduit de là que t_0 est racine des équations

$$u_0\varphi_1(t) - f_1(t) = 0, \qquad u_0\varphi_1'(t) - f_1'(t) = 0, \qquad u_0\varphi_1''(t) - f_1''(t) = 0;$$

on en déduit encore que t_0 est racine des deux équations

$$\varphi_1 f_1' - f_1\varphi_1' = 0, \qquad \varphi_1 f_1 - f_1\varphi'' = 0,$$

donc racine double de la première. Comme l'équation $\varphi_1 f_1' - f_1\varphi_1' = 0$ est de degré $2m_1 - 2$, elle ne peut avoir au plus que $m_1 - 1$ racines doubles au plus. On déduit de là qu'il ne peut y avoir plus de $m_1 - 1$ cycles isotropes d'indice 2 correspondant à une tangente stationnaire pour (Ub) qui soit génératrice du système (u), et de même qu'il ne peut y avoir plus de $m_2 - 1$ cycles isotropes d'indice 2 correspondant à une tangente stationnaire du système (v). Donc le maximum possible de cycles isotropes d'indice 2 est $(m_1 - 1) + (m_2 - 1)$ ou $m - 2$, et la présence d'un cycle isotrope ou plusieurs entraîne $m \geq 4$.

Qu'arriverait-il si un cône unicursal C de degré m admettait $m - 2$ cycles isotropes d'indice 2? La somme totale des indices des cycles isotropes vaut $2m$, les cycles déjà existants donnent un total égal à $2m - 4$, donc il faut compléter par une certaine quantité d'indices, au moins égaux à 2, et de total 4. Donc il n'y a que deux combinaisons possibles : $2 + 2$ ou 4. La première, nous venons de le voir, ne peut exister. Donc il reste simplement un seul indice égal à 4. Cela entraîne que le cône C soit imaginaire; j'ai cherché à réaliser de tels exemples, mais j'ai constaté pour $m = 4, 5, 6$ l'impossibilité de ce résultat : il

m'a paru assez vraisemblable que le résultat n'existe pour aucune valeur de m.

Plaçons-nous alors dans le cas où le cône C est réel (au sens vulgaire ou au sens de M. Goursat). Nous avons déjà vu que, de toutes façons, pour les cônes réels, $m-2$ cycles d'indice 2 ne peuvent avoir lieu ; essayons $m-3$. Dans ce cas, il faut compléter les cycles d'indice 2 par plusieurs cycles deux à deux conjugués pour lesquels les indices, supérieurs à 2, ont un total égal à 6. Il ne resterait donc que l'hypothèse $3+3$, qui ne peut se réaliser, puisqu'en courbes algébriques l'indice 3 est impossible, Prenons donc $m-4$; ceci entraîne d'abord que m soit pair, afin que les $m-4$ cycles se partagent en $\frac{m}{2}-2$ couples de deux cycles conjugués. On complétera donc par une somme d'indices entiers deux à deux égaux, de total égal à 8, sans qu'aucun puisse égaler 2 non plus que 3 : il ne reste donc que le choix unique $4+4$. Autrement dit, on cherchera un cône C unicursal de degré pair, soit $2m$, admettant $m-2$ couples de cycles conjugués isotropes d'indice 2 et un couple conjugué isotrope d'indice 4. Or nous trouverons plus loin que le cône du quatrième degré conduit à une impossibilité : il y aurait alors un seul couple d'indice 4 ; mais avec des cônes du sixième degré, on arrive à un cône réel, au sens de M. Goursat seulement.

5. Jusqu'ici nos pérégrinations dans le domaine des courbes unicursales ont été réglées par la considération du cône des binormales et par le désir soit d'avoir l'indice maximum (cône C de degré m avec un cycle unique d'indice $2m$), soit l'indice minimum (cône C de degré m possédant le plus grand nombre possible de cycles d'indice 2). Avant de passer définitivement aux cônes réels, continuons en cherchant cette fois ce que donnent les cônes de plus faible degré ; soit m le degré de C.

Si le cône C est de degré 2, on doit résoudre l'égalité $i_1+i_2+\ldots=4$, où les i sont les divers indices ; ils sont au moins égaux à 2, donc il ne peut y en avoir que deux ou un ; $2+2$ est impossible, donc il reste un seul indice égal à 4 ; c'est l'exemple de la cubique de M. Lyon.

Pour $m=3$, on résout $i_1+i_2+\ldots=6$; il ne peut y avoir plus de

trois entiers, puisque chacun est au moins égal à 2; trois indices égaux à 2 ne peuvent exister; $2+4$ est impossible aussi, car nous avons remarqué que l'existence d'un seul indice égal à 2 entraîne $m \geq 4$; $3+3$ est impossible. Donc il ne reste que 6 tout court; c'est le cas fourni par l'identité de Bezout correspondant aux valeurs $p=1$, $d=1$, $h=1$ des entiers considérés au paragraphe I; la courbe (4) est alors du degré 5 et imaginaire.

Soit maintenant $m=4$; on résout $i_1+i_2+\ldots=8$ et, comme plus haut, on arrive aux seules solutions $2+2+4$; $2+6$; $4+4$; 8. Dans tous les cas, la directrice sphérique de C sera unicursale et de degré 4. Le troisième cas, deux cycles d'indice 4, sera étudié plus bas, il conduit à une impossibilité. Le dernier correspond à l'identité de Bezout : on a alors soit $p=2$, $d=0$, $h=1$, et une courbe $(\mathfrak{A})$ de degré 7, soit $p=1$, $d=2$, $h=1$, et une courbe $(\mathfrak{A})$ de degré 7. Dans les deux premiers cas, la courbe $(\mathfrak{B})$ est du quatrième ordre, imaginaire, et l'une des coordonnées sphériques u, v est du troisième degré, l'autre du premier degré. Je peux donc supposer que la génératrice G_1 de C d'indice 2 a pour équations $x-iy=0$, $z=0$, autrement dit correspond à $u=\infty$, $v=\infty$ et que u, qui est fraction du premier degré en t, soit exactement égal à t. J'écris donc, pour représenter $(\mathfrak{B})$,

$$u=t, \qquad v=At^3+Bt^2+Ct+D;$$

dans le premier cas, si t_0 est la valeur du paramètre qui donne la seconde génératrice d'indice 2, on pourra écrire plus simplement $u=t$, $v=t_0+A(t-t_0)^3$; l'équation qui donne les génératrices isotropes, $u-v=0$, devient $(t-t_0)[1-A(t-t_0)^2]=0$; elle admet pour racines $t=\infty$ et $t=t_0$ racines simples; il est impossible que l'équation débarrassée de ces deux racines, à savoir $1-A(t-t_0)^2=0$ ait une racine double. Donc le premier cas est impossible. Dans le second cas, il suffit manifestement d'écrire

$$u=t, \qquad v=t+A(t-t_0)^4 \tag{13}$$

pour avoir une courbe $(\mathfrak{A})$ algébrique, rentrant d'ailleurs, avec un simple changement de notations dans le type (6); la courbe $(\mathfrak{A})$ s'obtient aisément, elle est du sixième degré.

Ce qui précède montre qu'il n'existe pas de courbe unicursale du

quatrième degré à torsion constante, car nous savons que le degré du cône C est au plus égal à celui de $(\mathfrak{A})$ et nous avons passé en revue les cônes de degré 2, 3, 4 sans trouver de courbe du quatrième degré. Nous avons trouvé des courbes $(\mathfrak{A})$ unicursales de degré 3, 5, 6, 7 toutes imaginaires.

Nous allons voir qu'à partir du degré 5 pour le cône unicursal C et pour tous les degrés supérieurs à 5, on trouve des courbes unicursales $(\mathfrak{A})$ réelles. Celle qui a le plus faible degré est de degré 8 et correspond à un cône C du cinquième degré.

6. Je porte maintenant mes efforts sur les courbes unicursales réelles. Les génératrices isotropes de C s'associent par couples de deux génératrices conjuguées; chaque couple est caractérisé par son degré, sa classe et son indice; m étant le degré du cône C, on doit, en désignant par $i_1, i_2, \ldots$ les indices des divers couples isotropes, résoudre l'équation $i_1 + i_2 + \ldots = m$, tous les i étant supérieurs à l'unité, aucun n'étant égal à 3; les i ne peuvent être égaux tous à 2, de sorte que le nombre des i est au plus égal à l'entier immédiatement inférieur à $\frac{m}{2}$. Si m est donné, le nombre d'essais est donc limité. De même si l'on se donne, non plus m, mais le degré M de $(\mathfrak{A})$, le nombre d'essais reste limité, puisque $\frac{M}{2} < m < M$. Si l'on se donne $m = 5$, il n'y a qu'une solution possible, à savoir $i_1 = 5$; si $m = 6$, il y a deux solutions $i_1 = 6$ ou bien $i_1 = 4$, $i_2 = 2$. Or, pour chaque valeur de m, la solution $i_1 = m$ est admissible et correspond au cas le plus simple. La directrice $(\mathfrak{D})$, dans ce cas, est unicursale et de degré m si m est pair, mixte et de degré $2m$ si m est impair.

Les exemples connus avant ce Mémoire, dus exclusivement à M. Fabry, correspondaient tous à ce cas. Je le reprends.

Je dois d'abord éliminer les paramètres superflus provenant d'une substitution homographique sur t et d'un déplacement de $(\mathfrak{D})$ à la surface de la sphère. Le cône C étant réel, je choisis le paramètre t réel pour les points réels de $(\mathfrak{D})$ et j'ai le droit de supposer que i et $-i$ sont les valeurs de t correspondant aux génératrices isotropes; c, c', c'' sont donc des fractions rationnelles en t, de degré m si m est pair,

$2m$ si m est impair, ayant pour dénominateur $(1+t^2)^{\frac{m}{2}}$ ou $(1+t^2)^m$; si donc on pose $t=\tan\frac{\varphi}{2}$, chacun des cosinus c, c', c'' est une expression de la forme

$$\lambda+\lambda_1\cos\varphi+\mu_1\cos\varphi+\ldots+\lambda_h\cos h\varphi+\mu_h\sin h\varphi,$$

et réciproquement. On reconnaît le type employé par M. Fabry. Nous avons montré l'avantage d'employer les coordonnées sphériques α, β; d'autre part, les intégrales à étudier portent sur des fractions rationnelles en t ayant pour dénominateur une puissance de $(1+t^2)$. Si donc j'introduis le paramètre q égal à $e^{i\varphi}$, avec $t=\tan\frac{\varphi}{2}$, j'ai $q=\frac{1+it}{1-it}$, $t=i\frac{1-q}{1+q}$, et pour $t=i$, q est nul; pour $t=-i$, q est infini. Avec le paramètre q, les intégrales portent sur une fraction rationnelle en q dont le dénominateur est simplement une puissance de q : l'intégration se fait alors à vue, la condition d'algébricité est évidente. Ces deux raisons combinées, d'une part l'emploi des coordonnées α, β, d'autre part l'emploi du paramètre q, apportent de grosses simplifications : réduction du nombre d'inconnues, simplification des équations restantes. Le lecteur pourra comparer les calculs dans les deux méthodes : celle de M. Fabry et celle que j'emploie ici.

La substitution homographique faite sur t de façon à obtenir les génératrices isotropes pour $+i$ et $-i$ laisse un paramètre à notre disposition. Raisonnons avec q : q doit avoir une valeur de module unité pour les points réels; on peut remplacer q par $qe^{i\omega}$, où ω est une constante réelle arbitraire.

Les deux génératrices isotropes G et G′ de C sont imaginaires conjuguées. Leur plan est réel, nous le prenons pour plan des xy; il nous reste donc un paramètre à notre disposition, à savoir une rotation autour de Oz. Si l'on suppose que $q=0$ donne la droite G, $x+iy=0$, $z=0$ et $q=\infty$ la droite G′, $x-iy=0$, $z=0$, on pourra écrire

$$(14)\qquad \alpha=q^s\frac{q^m+A_1q^{m-1}+\ldots+A_m}{Bq^m+B_1q^{m-1}+\ldots+B_m},\qquad \beta=\frac{1}{q^r}\frac{1+A_1q+\ldots+A_mq^m}{B'+B_1q+\ldots+B_mq^m},$$

m et r étant deux entiers positifs; $A_1A_2\ldots A_m$, $B\ldots B_m$ des constantes réelles ou imaginaires ayant respectivement pour conjuguées $A_1\ldots A'_m$.

$B_1' \dots B_m'$. La première fraction représente bien, en effet, la fraction rationnelle la plus générale nulle pour $q = 0$, infinie pour $q = \infty$; la seconde s'en déduit en remarquant que, pour les valeurs de q égales à $e^{i\varphi}$, où φ est une constante réelle, l'expression conjuguée de la fraction α est bien celle que l'on a adoptée pour β. Sous la forme (14), on voit que le degré de $(\mathfrak{M})$ est $2(m+r)$, le degré de C est $2(m+r)$ ou $m+r$, suivant que $(\mathfrak{M})$ n'admet pas ou admet O pour centre. On écrit que le cône C admet simplement les génératrices $q = 0$, $q = \infty$ comme génératrices isotropes; nous formons $1 + \alpha\beta$ et l'on a l'identité

$$(15)\quad \begin{aligned}&(q^m + A_1 q^{m-1} + \dots + A_m)(1 + A_1' q + \dots + A_m' q^m)\\ &+(Bq^m + B_1 q^{m-1} + \dots + B_m)(B' + \dots + B_m' q^m) \equiv (1 + A_1 A_1' + \dots + B_m B_m') q^m.\end{aligned}$$

Nous devons tenir compte de la possibilité de changer q en $qe^{i\omega}$ et α en $\alpha e^{i\omega'}$, β en $\beta e^{-i\omega'}$, ω et ω' désignant des constantes réelles arbitraires. Si nous effectuons ces opérations, on voit que cela revient à faire les échanges

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{llllllll} A_1, & A_2, & \dots, & A_m, & A_1', & A_2', & \dots, & A_m', \\ A_1 e^{-i\omega}, & A_2 e^{-2i\omega}, & \dots, & A_m e^{-mi\omega}, & A_1' e^{i\omega}, & A_2' e^{2i\omega}, & \dots, & A_m' e^{mi\omega} \end{array}\right.$$

sur les A, et d'autre part sur les B, en posant $r\omega + \omega' = \omega''$,

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{llllllll} B, & B_1, & \dots, & B_m, & B', & \dots, & B_m', \\ Be^{i\omega''}, & B_1 e^{-i\omega - i\omega''}, & \dots, & B_m e^{-mi\omega - i\omega''}, & B' e^{i\omega''}, & \dots, & B_m' e^{mi\omega + i\omega''}. \end{array}\right.$$

On peut donc disposer de ω et ω' pour rendre A_m et B_m réelles, car si ω_m est l'argument de A_m, on écrira $\omega_m - m\omega = 2k\pi$ ou encore $\omega_m - m\omega = (2k+1)\pi$, ce qui donnera pour ω une valeur à choisir parmi une succession de $2m$ nombres différant les uns des autres de $\frac{\pi}{m}$; pour ω', on trouve l'une ou l'autre de deux valeurs différant de π. Dans ce cas, je dirai que le cône C a été mis dans la position canonique en même temps que q a reçu la forme canonique lui aussi.

Si l'on tient compte de l'identité (15) qui entraîne

$$A_m + B_m B' = 0, \qquad A_m' - BB_m' = 0,$$

on voit que A_m et B_m étant devenus réels, B aussi l'est devenu. Nous

avons fait disparaître complètement les paramètres superflus; posons

$$A_j = a_j + i a'_j, \qquad A'_j = A_j - i a'_j, \qquad B_k = b_k + i b'_k, \qquad B'_k = b_k - i b'_k,$$

les formules (14) contiennent les constantes réelles a et b, en nombre $2m-1$ au numérateur de α et $2m$ au dénominateur, en tout $4m-1$ constantes entre lesquelles l'identité (15) établit les relations suivantes :

1° Le coefficient de q^{2m} ou le terme constant donnent la relation $a_m + b_m b = 0$;

2° Le coefficient de q^λ, où λ est l'un des nombres $1, 2, \ldots, m-1$, donne une relation entre les lettres A, B; le coefficient de $q^{2m-\lambda}$ donne évidemment la relation conjuguée, de sorte que, en ajoutant et retranchant membre à membre ces deux relations, on a deux équations à coefficients réels entre les a et b.

Comme le coefficient de q^m est le même de part et d'autre, nous avons, par l'identité (15), un total de $2m-1$ équations entre les $4m-1$ lettres a, b. Nous verrons plus tard, comme application d'une proposition générale, que l'on peut exprimer rationnellement les a, b au moyen de $2m$ arbitraires $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2m}$, de sorte qu'à tout système de valeurs réelles des μ corresponde un cône unicursal C réel du type envisagé.

Mais on n'a pas terminé : la courbe (C) n'est algébrique que si le vecteur période relatif à $q=0$ est nul; cela fait trois équations au maximum à écrire encore. La fraction $\frac{\frac{d\alpha}{dq}}{(1+\alpha\beta)^2}$ est le quotient d'un polynome entier en q par une puissance de q : on a donc immédiatement la condition relative à $\int \frac{d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}$ et il est clair que $\int \frac{d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}$ donne la relation conjuguée : ces deux relations donnent, comme précédemment, deux équations (au plus) à coefficients réels entre les a et b. Enfin, $\int \frac{\beta\, d\alpha - \alpha\, d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}$ fournit une relation qui est elle-même sa conjuguée. On a donc trois équations nouvelles (au plus) à écrire entre les a, b ou, si l'on veut, les μ.

Nous reviendrons plus tard sur cette étude. Je passe immédiatement à un exemple.

7. Le cas du cône C de degré 4 à deux génératrices d'indice 4 avait été réservé; nous allons voir qu'il ne donne rien. J'écris

$$\alpha = q\frac{q+A}{Bq+C}, \qquad \beta = \frac{1+Aq}{q(B+Cq)}, \tag{18}$$

où A, B, C, d'après ce qui précède, peuvent être supposés réels si le cône C est réel. La relation $A+BC=0$ donne

$$1+\alpha\beta = \frac{(1+A^2+B^2+C^2)q}{(Bq+C)(B+Cq)}.$$

Ici, le changement de q en $\frac{1}{q}$ échange α en β, ce qui correspond à une symétrie de (w) par rapport à zOx; ce changement transforme $\int\frac{d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}$ en $\int\frac{d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}$, de sorte qu'il suffit d'étudier $\int\frac{d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}$ et $\int\frac{\beta\,d\alpha-\alpha\,d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}$. Par un calcul simple, on voit que la première intégrale donne $AC+B=0$. En réunissant $A+BC=0$, $AC+B=0$, on a $C^2=1$; comme on peut changer de signe B et C simultanément (rotation de π autour de Oz), on prend $C=1$, d'où $A=-B$. Il ne reste donc plus qu'une arbitraire A, que l'on devrait espérer déterminer par l'unique équation restant à écrire; cet espoir ne se réalise pas, car le terme en $\frac{dq}{q}$ de la dernière intégrale a pour coefficient $\frac{2}{(1+A^2+B^2+C^2)^2}$ et ne peut donc jamais s'annuler. Ceci prouve qu'il ne faut accorder qu'une confiance relative aux dénombrements simultanés d'équations et d'inconnues : sous la forme (18) on a, en effet, trois inconnues A, B, C entre lesquelles la théorie établit seulement trois équations; la discussion a montré que ce système est incompatible. J'aurai l'occasion de revenir longuement sur ce genre de considérations.

Je fais alors l'essai suivant :

$$\alpha = q^p\frac{q^m+A}{Bq^m+C}, \qquad \beta = \frac{1}{q^p}\frac{1+Aq^m}{B+Cq^m}, \tag{19}$$

où A, B, C sont réels, m et p deux entiers positifs. On a immédiate-

ment la relation $A + BC = o$ pour exprimer qu'il n'y a que les deux génératrices isotropes $q = o$ et $q = \infty$. On a alors

$$1 + \alpha\beta = \frac{(1 + B^2)(1 + C^2)q^m}{(Bq^m + C)(B + Cq^m)},$$

et comme l'échange de q en $\frac{1}{q}$ échange α en β, $\frac{d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}$ en $\frac{d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}$, je me borne aux deux intégrales $\int \frac{d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}$, $\int \frac{\beta\, d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}$. Si je pose $q^m = x$, j'ai

$$(20)\qquad \frac{d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2} = \frac{\{pBx^2 + C[p + m + B^2(m-p)]x - pBC^2\}(B + Cx)^2}{(1 + B^2)^2(1 + C^2)^2 x^2}\, q^{p-1}\, dq;$$

$$(21)\qquad \frac{\beta\, d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2} = \frac{\{pBx^2 + C[p + m + B^2(m-p)]x - pBC^2\}(B + Cx)(1 + Ax)}{(1 + B^2)^2(1 + C^2)^2 x^2}\, \frac{dq}{q}.$$

Si $m = 1$, je supposerai $p \geq 3$ de façon que l'intégrale (20) ne donne pas de condition.

Si m est plus grand que 1, on suppose p premier avec m; sinon, il est clair que, δ étant le plus grand commun diviseur de m et p, on prendrait q^δ pour nouveau paramètre. Dans ce cas de $m \geq 2$, l'intégrale (20) ne donne aucune condition, puisqu'elle porte sur cinq termes d'exposant $p - 1 + hm$, où h a l'une des valeurs 2, 1, 0, -1, -2 : p et m étant premiers, aucun de ces exposants ne se réduit à -1. Il ne reste donc que l'intégrale (21) : le multiplicateur de $\frac{dq}{q}$ est une fraction au numérateur de laquelle il suffit évidemment d'annuler le terme en x^2; A est égal à $-BC$ et les deux paramètres B et C sont liés par l'unique relation

$$pB^2 + C^2(1 - B^2)[p + m + B^2(m - p)] + pB^2C^2 = o.$$

Je peux diviser par C^2 et poser $C - \frac{1}{C} = u$, de sorte que j'écris

$$pB^2(u^2 + 2) + (1 - B^2)[p + m + B^2(m - p)] = o.$$

Finalement j'obtiens, au moyen du paramètre B,

$$(22)\quad \left\{\begin{array}{l} u=\dfrac{\sqrt{B^2(m-p)-(m+p)}}{B\sqrt{p}}, \qquad \sqrt{u^2+4}=\dfrac{\sqrt{B^2(m-p)+4B^2p-(m+p)}}{B\sqrt{p}}; \\ C-\dfrac{1}{C}=u, \qquad C+\dfrac{1}{C}=\sqrt{u^2+4}; \\ \alpha=q^p\dfrac{q^m-BC}{Bq^m+C}, \qquad \beta=\dfrac{1}{q^p}\dfrac{1-BCq^m}{B+Cq^m}. \end{array}\right.$$

Si p est supérieur à m, nous n'avons pas de courbe réelle (c'est donc le cas pour $m=1$, puisqu'alors $p>3$). Quand p est inférieur à m ($m\geq 2$ et p premier avec m), on donnera, pour avoir une courbe $(\mathcal{A})$ réelle, à B une valeur arbitraire supérieure ou égale à $\sqrt{\dfrac{m+p}{m-p}}$; on calcule u puis C, et l'on a la courbe $(\mathcal{A})$ qui est réelle et dépend d'un paramètre arbitraire.

Je vais faire ici quelques remarques qui reviendront constamment, mais qu'il serait fastidieux de répéter en détail : B donné, u a deux valeurs, $\sqrt{u^2+4}$ deux valeurs aussi que l'on peut combiner arbitrairement avec les deux valeurs de u; cela fait donc quatre valeurs de C correspondant à un même B, à savoir C, $\dfrac{-1}{C}$, $-C$, $\dfrac{1}{C}$; si B est remplacé par $-B$, les deux valeurs de u, donc les quatre valeurs de C, ne changent pas. On obtient ainsi huit systèmes de valeurs pour l'ensemble B, C ne donnant qu'une courbe $(\mathcal{A})$, à un déplacement près. D'abord, on peut changer B et C simultanément de signe : rotation de 180° autour de Oz. Conformément à ce qui a été expliqué au paragraphe 6, je peux changer C de signe en changeant q en jq, où j est une racine de $j^m=-1$, ce qui ne change pas la courbe, puis en faisant tourner la courbe $(\mathcal{B})$ autour de Oz, de façon à multiplier α par j^{-p} et β par j^p. De là résulte évidemment que les huit systèmes de valeurs de B et C ont été réduits à deux. Maintenant, si je remplace $(\mathcal{B})$ par la courbe $(\mathcal{B}')$ symétrique par rapport à l'origine, ce qui revient à remplacer α par $\dfrac{-1}{\beta}$ et β par $\dfrac{-1}{\alpha}$, j'ai

$$(\mathcal{B}')\qquad \alpha=q^p\frac{q^m+\dfrac{B}{C}}{Bq^m-\dfrac{1}{C}}, \qquad \beta=\frac{1}{q^p}\frac{1+\dfrac{C}{B}q^m}{B-\dfrac{1}{C}q^m};$$

$(\mathfrak{W}')$ définit le même cône C que $(\mathfrak{W})$; mais, tandis que $(\mathfrak{W})$ correspond au système de valeurs numériques (B, C), $(\mathfrak{W}')$ correspond au système $\left(\mathrm{B}, \frac{-1}{\mathrm{C}}\right)$. Donc il est bien établi que les huit systèmes (B, C) envisagés sont équivalents. Cette circonstance se reproduit fréquemment; elle tient à ce qu'il y a plusieurs façons d'amener le cône C dans la position dite *canonique* ou de mettre la variable q sous sa forme canonique. Les calculs devront, dans chaque exemple, être dirigés de façon à mettre en évidence les divers systèmes de solutions pratiquement équivalents.

En raison de l'importance de cet exemple, je vais donner les valeurs de c, c', c''. En posant $q = e^{i\varphi}$, on a aisément

$$(23)\qquad \begin{cases} c = \dfrac{2\cos(m+p)\varphi - 2u\mathrm{B}\cos p\varphi - 2\mathrm{B}^2\cos(p-m)\varphi}{(1+\mathrm{B}^2)\sqrt{u^2+4}}, \\ c' = \dfrac{2\sin(m+p)\varphi - 2u\mathrm{B}\sin p\varphi + 2\mathrm{B}^2\sin(m-p)\varphi}{(1+\mathrm{B}^2)\sqrt{u^2+4}}, \\ c'' = \dfrac{-4\mathrm{B}\cos m\varphi - u(1-\mathrm{B}^2)}{(1+\mathrm{B}^2)\sqrt{u^2+4}}. \end{cases}$$

On pourra remarquer que si B est égal à la valeur limite $\sqrt[4]{\frac{m+p}{m-p}}$, la quantité u est nulle. C est égal à 1, et l'on retrouve un des quatre exemples de M. Fabry, qu'il y a lieu d'ailleurs, on le verra, de mettre en évidence :

$$(24)\qquad \begin{cases} c = \dfrac{\sqrt{m-p}\cos(m+p)\varphi - \sqrt{m+p}\cos(m+p)\varphi}{\sqrt{m+p}+\sqrt{m-p}}, \\ c' = \dfrac{\sqrt{m-p}\sin(m+p)\varphi + \sqrt{m+p}\sin(m+p)\varphi}{\sqrt{m+p}+\sqrt{m-p}}, \\ c'' = \dfrac{-2\sqrt[4]{m^2-p^2}\cos m\varphi}{\sqrt{m+p}+\sqrt{m-p}}; \\ \alpha = q^p\dfrac{q^m - \sqrt[4]{\frac{m+p}{m-p}}}{\sqrt[4]{\frac{m+p}{m-p}}q^m+1}, \qquad \beta = \dfrac{1}{q^p}\dfrac{1-\sqrt[4]{\frac{m+p}{m-p}}q^m}{\sqrt[4]{\frac{m+p}{m-p}}+q^m}. \end{cases}$$

Étudions les propriétés de $(\mathfrak{W})$, C, $(\mathfrak{S})$ en supposant $m \geq 2$, p infé-

rieur à m et premier avec m, B supérieur à $\sqrt[4]{\frac{m+p}{m-p}}$. Les formules (22), qui sont de la forme canonique $\alpha = q^p f(q^m)$, $\beta = \frac{1}{q^p}\varphi(q^m)$, que je signalerai ultérieurement, montrent qu'en remplaçant q par $qe^{\frac{2i\pi}{m}}$, on remplace un point de la courbe (𝔐) par celui qui en dérive par une rotation de l'angle $2\pi\frac{p}{m}$ autour de Oz : en continuant, on a un polygone régulier étoilé de m côtés inscrit dans la courbe (𝔐), donc la courbe (𝔐) ou le cône C se reproduisent par une rotation d'amplitude $\frac{2\pi}{m}$ effectuée autour de Oz.

Le plan zOx est plan de symétrie pour (𝔐), ainsi que tous les plans qui en dérivent par une rotation de $\frac{2\pi}{m}$ autour de Oz; le fait que zOx est plan de symétrie et que Oz est axe de rotation $\frac{2\pi}{m}$ (locution abrégée que j'emploierai constamment) entraîne que le plan $\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\frac{\pi}{m}$ est lui aussi plan de symétrie de (𝔐); donc tous les plans obtenus en faisant tourner zOx autour de Oz de l'angle $\frac{\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}, \frac{3\pi}{m}, \cdots$ sont plans de symétrie de (𝔐) et C : cela fait donc m plans de symétrie pour (𝔐) et C; les m droites perpendiculaires, à savoir Oy et les droites obtenues par des rotations successives de Oy autour de Oz d'angles égaux à $\frac{\pi}{m}$ sont axes de symétrie de (𝔏); la courbe (𝔏) se reproduit aussi par rotation de $\frac{2\pi}{m}$ autour de Oz.

Si u n'est pas nul, le cône C est, comme la courbe (𝔐), du degré $2(m+p)$; les deux génératrices isotropes $z=0$, $x \pm iy = 0$ correspondent à des cycles de degré et classe égaux à p; le degré de (𝔏) est $4m+2p$. On remarquera que le degré de C est un nombre pair susceptible de prendre toutes les valeurs égales ou supérieures à 6; le degré de (𝔏) est un nombre pair susceptible de prendre toutes les valeurs égales ou supérieures à 10. Pour $m=2p$, $p=1$, C est de degré 6, (𝔏) de degré 10.

Si u est nul, c'est-à-dire B égal à la limite $\sqrt[4]{\frac{m+p}{m-p}}$, les résultats qui précèdent subsistent si m est pair, et par suite p impair. Mais si m

est impair et p pair, on voit que le changement de φ en $\varphi+\pi$ change simultanément de signe c, c', c''; la directrice (Ω) est donc mixte, de degré $2(m+p)$ et le cône C de degré $m+p$ seulement (nombre impair susceptible de prendre toutes les valeurs impaires égales ou supérieures à 5); les deux cycles isotropes sont de degré et classe égaux à $\frac{p}{2}$, le degré de (Δ) est $2m+p$, nombre pair susceptible de prendre toutes les valeurs paires égales ou supérieures à 8. Pour $m=3$, $p=2$, C est du degré 5, (Δ) de degré 8.

Donc cet exemple suffit pour démontrer qu'on peut obtenir des courbes (Δ) unicursales réelles de degré égal à un nombre pair quelconque égal ou supérieur à 8, ou encore correspondant à un cône unicursal C de degré égal ou supérieur à 5.

Je viens d'indiquer ce qui se passe quand u est nul et p pair (par suite m impair) : la directrice (Ω) est mixte.

Si u est nul et p impair, auquel cas (Ω) est distincte de (Ω'), je vais montrer que C coïncide avec lui-même, non seulement après rotation de $\frac{2\pi}{m}$ autour de Oz, mais par simple rotation de $\frac{\pi}{m}$ autour de Oz. Mais cette fois (Ω), par la rotation $\frac{\pi}{m}$, vient coïncider avec (Ω') et non plus avec elle-même : il suffit de remplacer q par $qe^{\frac{i\pi}{m}}$ pour passer d'un point B (α, β) de (Ω) à un autre point B_1 de (Ω) qui a pour coordonnées, comme on s'en assure aisément,

$$\left| e^{\frac{p i\pi}{m}}\frac{-1}{\beta},\quad e^{-\frac{p i\pi}{m}}\frac{-1}{\alpha}\right|;$$

si maintenant je fais tourner B_1 de l'angle $-\frac{p\pi}{m}$ autour de Oz, il vient s'appliquer sur le point de coordonnées $\left(\frac{-1}{\beta}, \frac{-1}{\alpha}\right)$, c'est-à-dire le point B' de (Ω') diamétralement opposé à B; faisons tourner B_1 de l'angle $-\left(\frac{p+1}{2}\right)\frac{2\pi}{m}$; puisque $\frac{p+1}{2}$ est un entier, B_1 vient sur un point B_2 appartenant toujours à (Ω). Je vois donc que B_2, par une rotation égale à $\frac{\pi}{m}$ autour de Oz, vient sur B' : c'est ce qu'il fallait établir; une rotation de $\frac{\pi}{m}$ autour de Oz amène (Ω) sur (Ω'). La parité

de m n'a joué aucun rôle ici. Si donc u est nul et p impair, le cône C admet la rotation $\frac{\pi}{m}$, donc tous les plans obtenus en faisant pivoter zOx de l'angle $\frac{\pi}{2m}$ autour de Oz constituent $2m$ plans de symétrie de C et non plus seulement m; les $2m$ perpendiculaires sont $2m$ axes de symétrie de $(\mathfrak{b})$. La courbe $(\mathfrak{b})$ admet aussi la rotation $\frac{\pi}{m}$ autour de Oz. Bien que la parité de m ne soit pas intervenue jusqu'ici dans ce cas, où nous supposions p impair et u nul, nous allons maintenant trouver une différence : π est égal à $m \times \frac{\pi}{m}$, une rotation de l'angle $\frac{\pi}{m}$ autour de Oz amène $(\mathfrak{w})$ sur $(\mathfrak{w}')$, deux rotations successives ramènent $(\mathfrak{w}')$ sur $(\mathfrak{w})$, etc.; donc, si m est pair, $(\mathfrak{w})$ admet Oz pour axe de symétrie, ce qui est banal ici, cette propriété subsistant pour p impair, m pair avec u non nul; tandis que, si m est impair, toujours avec p impair et u nul, $(\mathfrak{w})$ et $(\mathfrak{w}')$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à Oz : (c, c', c'') étant un point de $(\mathfrak{w})$, $(-c, -c', c'')$ appartient à $(\mathfrak{w}')$, donc $(c, c', -c'')$ appartient à $(\mathfrak{w})$: la courbe $(\mathfrak{w})$ admet le plan xOy pour plan de symétrie; mais, au point de vue de C ou $(\mathfrak{b})$, cela n'ajoute aucune propriété, car nous savions déjà que $(\mathfrak{b})$ admettait Oz pour axe de symétrie.

8. Je viens d'étudier en détail cet exemple en me plaçant uniquement au point de vue des courbes $(\mathfrak{b})$ réelles. Il y aurait grosse faute à ne pas profiter de cet exemple pour les surfaces applicables sur le paraboloïde ou les surfaces minima [réelles (φ)], même quand les courbes $(\mathfrak{b})$ sont imaginaires. Mais les propriétés sont si nombreuses que je me bornerai à quelques cas particuliers fort simples.

Supposons B, C imaginaires pures : u et $\sqrt{u^2+4}$ sont donc imaginaires pures aussi. Si m est pair et p impair, la courbe $(\mathfrak{w})$ est imaginaire, mais réelle $(\mathfrak{g})$. En effet, pour φ réel, les formules (23) montrent que c, c' sont imaginaires pures et c'' réel; si l'on remplace φ par $\varphi + \pi$, le point (c, c', c'') se trouve remplacé par $(-c, -c', c'')$ qui est conjugué du premier : donc $(\mathfrak{w})$ coïncide avec sa conjuguée, elle est réelle $(\mathfrak{g})$. Elle conduit donc à deux surfaces réelles applicables sur le paraboloïde, admettant chacune un centre de symétrie qui est en même temps point conique isolé de ces surfaces. La surface

minima M est réelle au sens vulgaire; la surface minima M_0 est circonscrite à la sphère le long d'une courbe imaginaire mais réelle (G).

Pour définir tous les éléments par le calcul, je poserai

$$B = iB_1, \qquad C = iC_1, \qquad u = C - \frac{1}{C} = i\left(C_1 + \frac{1}{C_1}\right) = iu_1,$$

$$\sqrt{u^2+4} = C + \frac{1}{C} = i\left(C_1 - \frac{1}{C_1}\right) = i\sqrt{u_1^2-4} \quad (B_1 \text{ et } C_1 \text{ doivent être réels});$$

$$u_1 = C_1 + \frac{1}{C_1}, \qquad \sqrt{u_1^2-4} = C_1 - \frac{1}{C_1}.$$

Nous multiplions α et β par i et $-i$ respectivement, ce qui revient à faire tourner toute la figure de 90° autour de Oz; nous avons donc

$$(25)\quad \begin{cases} C_1 + \dfrac{1}{C_1} = \dfrac{\sqrt{B_1^2(m-p) - (m+p)}}{B_1\sqrt{p}}, \\ C_1 - \dfrac{1}{C_1} = \dfrac{\sqrt{B_1^2(m-p) - 4pB_1^2 - (m+p)}}{B_1\sqrt{p}}; \\ \alpha = q^p \dfrac{q^m + B_1C_1}{B_1q^m + C_1}, \qquad \beta = \dfrac{-1}{q^p}\dfrac{1 + B_1C_1q^m}{B_1 + C_1q^m} \qquad (m \text{ pair}, p \text{ impair}). \end{cases}$$

La seule condition à écrire pour que C_1 soit réel est

$$B_1^2(m-p) - 4pB_1^2 - (m+p) > 0,$$

ce qui entraîne

$$m > p \qquad \text{et} \qquad B_1^2 > \frac{2p + \sqrt{m^2+3p^2}}{m-p}.$$

Ici la courbe (25) est représentée analytiquement sous l'une des formes canoniques que j'ai indiquées pour les courbes sphériques (G), à savoir $\alpha = f(q)$, $\beta = f_0\left(\frac{-1}{q}\right)$, où f et f_0 sont deux fractions conjuguées. Il y aurait également ici de nombreuses propriétés à rappeler sur les symétries planes.

Pour B_1 égal à sa limite inférieure $\sqrt{\frac{2p + \sqrt{m^2+3p^2}}{m-p}}$, la courbe (25) disparaît tout entière à l'infini; j'ai montré, dans le Mémoire sur le paraboloïde, l'application que l'on en peut faire pour les surfaces minima.

Les formules (23) montrent encore que, si B et u sont imaginaires

pures, mais $\sqrt{u^2+4}$ réel, on obtient le résultat suivant : pour z réel, la courbe $(\mathfrak{w})$ contient le point $c=\lambda$, $c'=\mu$, $c''=i\nu$, où λ, μ, ν sont réels; la courbe $(\mathfrak{w}')$ contient le point $c=-\lambda$, $c'=-\mu$, $c''=-i\nu$; or si, comme précédemment, m est pair et p impair, l'axe des z est axe de symétrie, soit pour $(\mathfrak{w})$, soit pour $(\mathfrak{w}')$; donc la courbe $(\mathfrak{w}')$ contient aussi le point $c=\lambda$, $c'=\mu$, $c''=-i\nu$ conjugué du point considéré sur $(\mathfrak{w})$; donc cette fois $(\mathfrak{w})$ et $(\mathfrak{w}')$ sont conjuguées l'une de l'autre, le cône C est encore réel (5); on obtient donc encore des surfaces à centre applicables sur le paraboloïde, réelles (c); mais les surfaces minima M ou M_0 sont imaginaires. Je poserai encore $B=iB_1$, et j'aurai

$$u=\frac{i\sqrt{B_1^2(m-p)-(m+p)}}{B_1\sqrt{p}}=C-\frac{1}{C},$$

$$\sqrt{u^2+4}=\frac{\sqrt{-B_1^2(m-p)+4pB_1^2+(m+p)}}{B_1\sqrt{p}}=C+\frac{1}{C},$$

u étant imaginaire pure et $\sqrt{u^2+4}$ réel, C sera une imaginaire de module égal à l'unité; ici il faudra que

$$B_1^2(m-p)-(m+p)>0 \qquad \text{et} \qquad B_1^2(m-p)-4pB_1^2-(m+p)<0.$$

On a donc

$$m>p \qquad \text{et} \qquad \frac{2p+\sqrt{m^2+3p^2}}{m-p}>B_1^2>\sqrt{\frac{m+p}{m-p}};$$

je conserverai les formules (23) en remplaçant B par iB_1. Ici, pour $B_1=\sqrt[4]{\frac{m+p}{m-p}}$, on retrouvera l'existence de rotations égale à $\frac{\pi}{m}$ parce qu'alors on a $u=0$, $C=1$.

Le lecteur pourrait sans peine généraliser ces résultats pour les hypothèses négligées sur les parités de m et p.

9. Cet exemple du paragraphe 7 généralise donc l'exemple de M. Fabry, qui correspond simplement à la valeur limite $\sqrt[4]{\frac{m+p}{m-p}}$ du paramètre B. On a vu que, pour obtenir des courbes réelles, il était nécessaire que m soit supérieur à p. Ceci met sur la voie d'une proposition plus générale, dont la démonstration est immédiate : si un cône

unicursal C n'a que deux génératrices isotropes et si la courbe à torsion constante correspondante est algébrique, il est nécessaire, pour que la courbe soit réelle (au sens vulgaire), que le degré de chacun des deux cycles isotropes soit inférieur au quart du degré de C. Écrivons en effet, en remarquant que la directrice (𝔅) est unicursale ou mixte,

$$(26)\quad \begin{cases} \alpha = q^p\,\dfrac{q^m + A_1 q^{m-1} + \ldots + A_m}{B q^m + B_1 q^{m-1} + \ldots + B_m}, \qquad \beta = \dfrac{1}{q^p}\,\dfrac{1 + A'_1 q + \ldots + A_m q^m}{B + B'_1 q + \ldots + B_m q^m}, \\ 1 + \alpha\beta = \dfrac{(1 + A_1 A'_1 + \ldots + A_m^2 + B^2 + B_1 B'_1 + \ldots + B_m^2) q^m}{(B q^m + \ldots + B_m)(B + B'_1 q + \ldots + B_m q^m)}. \end{cases}$$

On en déduit

$$(27)\quad \begin{cases} c + ic' = \dfrac{2\alpha}{1 + \alpha\beta} = 2 q^{p-m}\,\dfrac{(q^m + A_1 q^{m-1} + \ldots + A_m)(B + B'_1 q + \ldots + B_m q^m)}{(1 + A_1 A'_1 + \ldots + B_m^2)}, \\ c'' = \dfrac{\alpha\beta - 1}{\alpha\beta + 1} = \dfrac{(1 + \ldots + B_m^2) q^m - 2(B q^m + \ldots + B_m)(B + B'_1 q + \ldots + B_m q^m)}{(1 + A_1 A'_1 + \ldots + B_m^2) q^m} \end{cases}$$

En divisant, on a $\lambda = \dfrac{c + ic'}{c''}$, qui contient q^p en facteur, tandis que μ contient $\dfrac{1}{q^p}$ en dénominateur; ceci prouve que le cycle $q = 0$ est de degré et classe p, d'indice $2(m + p)$ si (𝔅) est distincte de (𝔅′), tandis que si (𝔅) est mixte, le degré ou classe sera $\dfrac{p}{2}$, l'indice $m + p$.

Je forme l'intégrale

$$\int (c + ic')\, d(c + ic') = \frac{c^2 + c'^2}{2} + i \int c'\, dc - c\, dc';$$

elle doit être algébrique. On a

$$(28)\quad \begin{cases} c + ic' = D q^{p+m} + D_1 q^{p+m-2} + \ldots + D_{2m} q^{p-m}, \\ c - ic' = D' q^{-p-m} + D'_1 q^{-p-m+1} + \ldots + D'_{2m} q^{-p+m}; \end{cases}$$

D_j et D'_j étant imaginaires conjuguées. On égale à zéro le coefficient de $\dfrac{1}{q}$ dans $(c + ic')\,\dfrac{d(c - ic')}{dq}$ et l'on trouve manifestement

$$(29)\quad (p + m) D D' + (p + m - 1) D_1 D'_1 + \ldots + (p - m) D_{2m} D'_{2m} = 0,$$

et si l'entier p, positif, était supérieur ou égal à m, le premier membre de (29) ne contiendrait que des termes positifs. On a donc bien, si la courbe $(\mathfrak{A})$ est réelle (c), $p < m$ sans égalité; si l'on appelle d le nombre $2(m+p)$, $p<m$ revient à $4p<d$. Si $(\mathfrak{B})$ est distincte de $(\mathfrak{A})$, p est le degré du cycle, d le degré de C. Si $(\mathfrak{B})$ est mixte, p et d sont doubles du degré du cycle et du degré de C; donc, de toutes façons, la propriété est établie.

10. Dans les paragraphes qui précèdent, le cas où le cône C est unicursal et de degré 2, 3, 4 a été épuisé complètement : on n'a eu que des courbes imaginaires de degré 3, 5, 6, 7. Puis nous avons été amenés à étudier à fond un cas très particulier de cône C réel, à deux génératrices isotropes, de degré arbitraire. Je vais maintenant étudier *complètement* les cônes *réels* de degré 5 et 6 et indiquer quelques cônes particuliers de cônes réels du degré 8. Cette étude sera nécessaire pour les lois générales que j'établirai au Chapitre suivant.

Soit d'abord le cas où C est de degré 5; il n'y a qu'une hypothèse possible, à savoir deux génératrices d'indice 5. La directrice $(\mathfrak{B})$ est mixte; nous savons que α et β sont deux fractions de degré 5 en q $\left(t=\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2},\ q=e^{i\varphi}\right)$ telles que le changement de φ en $\varphi+\pi$, c'est-à-dire de q en $-q$ remplace α par $\frac{-1}{\beta}$ et β par $\frac{-1}{\alpha}$. On en déduit immédiatement la forme de α et β :

$$\alpha=\frac{q^5+Aq^4+Bq^3+Cq^2+Dq}{-D'q^4+C'q^3-B'q^2+A'q-1},\qquad \beta=\frac{1+A'q+B'q^2+C'q^3+D'q^4}{-Dq+Cq^2-Bq^3+Aq^4-q^5},$$

où chaque lettre accentuée est la conjuguée de la même lettre non accentuée. En écrivant que l'équation $1+\alpha\beta=0$ n'a que les deux racines $q=0$, $q=\infty$ d'ordre 5, on a d'abord $D=D'=0$; j'écris donc simplement

$$\alpha=\frac{q^5+Aq^4+Bq^3+Cq^2}{Cq^3-B'q^2+A'q-1},\qquad \beta=\frac{1+A'q+B'q^2+Cq^3}{Cq^2-Bq^3+Aq^4-q^5}. \tag{30}$$

où A, B ont pour conjuguées A' et B' et où C désigne une quantité réelle, comme c'est notre droit, en amenant le cône C dans sa position canonique. En écrivant

$$(q^3+Aq^2+Bq+C)(1+A'q+B'q^2+Cq^3)$$
$$+(Cq^3-B'q^2+A'q-1)(C-Bq+Aq^2-q^3)\equiv 2(1+AA'+BB'+C^2)q^3,$$

puis exprimant que le terme en $\frac{dq}{q}$ disparaît dans $\frac{d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}$, $\frac{d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}$, $\frac{3\,d\alpha-\alpha\,d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}$, j'obtiens, par des calculs que je ne reproduis pas,

$$(31)\quad \begin{cases} B'+AC=0, \qquad A'B+AC'=0, \\ (2A'-AB')C^2-BC[3AA'-BB'-C^2-5] \\ \quad +(A'B-2A)(B^2+2AC)-(AB+C)(A'C-3B)-C(A^2+2B)=0 \\ \text{(équation conjuguée de la précédente)}, \\ C^4-5-(B^2-2AC)(B'^2-2A'C)-3(A^2-2B)(A'^2-2B')=0. \end{cases}$$

Il y a deux cas à distinguer suivant que A et B sont réelles toutes deux ou imaginaires. Dans le premier cas, zOx est plan de symétrie pour (𝔐), Oy axe de symétrie de (𝔏). Les équations (31) se réduisent alors à trois entre les trois inconnues A, B, C. Je recopie le système en supposant A, B, C réelles :

$$(32)\quad \begin{cases} B+AC=0, \\ (2-B)AC^2-BC[3A^2-B^2-C^2+5] \\ \quad +A(B-2)(B^2+2AC)-(AB+C)(AC-3B)-C(A^2+2B)=0, \\ C^4-5-(B^2-2AC)^2-3(A^2-2B)^2=0. \end{cases}$$

Il est clair qu'en remplaçant B par $-AC$ dans la seconde équation (32), AC est en facteur. J'ai donc plusieurs cas à distinguer :

Première solution : $A=0$, $B=0$, $C^4=5$. — En prenant $A=0$, $B=0$, $C=\sqrt[4]{5}$, on a le cône du cinquième degré déjà rencontré au paragraphe 7 pour $m=3$, $p=2$ donnant une courbe (𝔏) du huitième degré. Les formules relatives à ce cône sont

$$(33)\quad \begin{cases} \alpha=\dfrac{q^3+\sqrt[4]{5}q^2}{\sqrt[4]{5}q^3-1}, \qquad \beta=\dfrac{1+\sqrt[4]{5}q^3}{\sqrt[4]{5}q^2-q^3}; \\ c+ic'=\dfrac{\sqrt{5}-q^6}{(\sqrt{5}+1)q}, \qquad c-ic'=\dfrac{-1+\sqrt{5}q^6}{(\sqrt{5}+1)q^5}, \qquad c''=\dfrac{\sqrt[4]{5}(q^6+1)}{(\sqrt{5}+1)q}. \end{cases}$$

On remarquera que l'équation $C^4=5$ admet la solution imaginaire $C=i\sqrt[4]{5}$. Si l'on prend cette valeur de C, on trouve aisément une courbe (𝔐) imaginaire du dixième degré définie par

$$c+ic'=\frac{\sqrt{5}+q^6}{(\sqrt{5}-1)q}, \qquad c-ic'=\frac{1+\sqrt{5}q^6}{(\sqrt{5}-1)q^5}, \qquad c''=\frac{-i\sqrt[4]{5}(q^6+1)}{(\sqrt{5}-1)q^3}$$

jouissant de cette propriété que sa projection sur le plan xOy est une courbe réelle (ν), tout entière extérieure au cercle $x^2+y^2=1$. Cette courbe est symétrique par rapport au plan xOy de sa courbe conjuguée et ceci est intéressant pour les surfaces réelles applicables sur le paraboloïde : elles admettent xOy pour plan de symétrie.

Deuxième solution : $C=B=0$, $5+3A^4=0$. — On trouve un second cône imaginaire, d'ailleurs signalé, lui aussi, au paragraphe 7, pour $m=1$, $p=\frac{1}{4}$.

Troisième solution : $A\neq 0$, $C\neq 0$. — On a à résoudre

$$(34)\qquad \begin{cases} C^4-3A^2(A+2C)^2=5+A^2C^2(AC-2)^2, \\ (A^2C^2+5)(A+C)=C(3A^2+AC-C^2). \end{cases}$$

Ces deux équations n'ont que des solutions imaginaires; c'est très aisé à constater en remarquant que si l'on prend deux axes de coordonnées ωA, ωC, la première équation représente une courbe contenue dans les régions définies par l'inégalité

$$\left[C^2-A\sqrt{3}(A+2C)\right]\left[C^2+A\sqrt{3}(A+2C)\right]>0;$$

ces régions sont délimitées par quatre droites indéfinies se croisant à l'origine. De même, la seconde équation représente une courbe tout entière contenue dans les régions définies par l'inégalité $(A+C)C(3A^2+AC-C^2)>0$; ces nouvelles régions sont encore délimitées par quatre droites issues de l'origine et l'on constate aisément que les angles positifs relatifs à la seconde courbe sont tout entiers compris dans les angles négatifs de la première.

Nous avons donc à étudier le second cas. J'ai écrit :

$$(35)\qquad \alpha=\frac{q^5+Aq^4+Bq^3+Cq^2}{Cq^3-B'q^2+A'q-1},\qquad \beta=\frac{1+A'q+B'q^2+Cq^3}{Cq^2-Bq^3+Aq^4-q^5},$$

en amenant le cône C dans sa position canonique et employant la forme canonique pour q; mais il faut nous rappeler que ce choix de position et de variable n'est pas unique, comme il a été expliqué. Si nous remplaçons q par $qe^{i\omega}$, α par $\alpha e^{-5i\omega}$ et β par $\beta e^{5i\omega}$, nous aurons

$$\alpha=\frac{q^5+Ae^{-i\omega}q^4+Be^{-2i\omega}q^3+Ce^{-3i\omega}q^2}{Ce^{3i\omega}q^3-B'e^{2i\omega}q^2+A'e^{i\omega}q-1},$$

et l'on voit que si $e^{3i\omega} = \pm 1$, on a une autre position canonique du même cône C, A étant remplacé par $Ae^{\frac{ik\pi}{3}}$, B par $Be^{\frac{2ik\pi}{3}}$, où k désigne un entier. Ceci prouve qu'il y a avantage probable à prendre pour inconnues le module B et l'argument de A. Je pose $A = \rho e^{i\varphi}$, $A' = \rho e^{-i\varphi}$; d'où $B = -C\rho e^{-i\varphi}$, $B' = -C\rho e^{i\varphi}$. Je porte ces valeurs de A, A', B, B' dans la troisième équation (31), j'égale à zéro la partie réelle et la partie imaginaire, de sorte que j'obtiens deux équations remplaçant la troisième et la quatrième équation (31). On obtient ainsi

$$(36)\quad \begin{cases} \rho C^2 \cos 3\varphi + C[3\rho^2 - 5 - C^2 - C^2\rho^2] - C^2\rho^3 \cos 3\varphi - 5\rho\cos 3\varphi = 0 \\ [C^2(1+\rho^2)\sin 3\varphi = 0. \end{cases}$$

Or si l'on prend $\sin 3\varphi = 0$, d'où $\varphi = \frac{k\pi}{3}$, les diverses valeurs de l'entier k donnent toujours le même cône C dans des positions différentes: or, pour $k = 0$, A et B sont réels, donc ce cas est à écarter, puisqu'il a déjà été vu. Prenons donc $C^2(1+\rho^2) = 5$. En tenant compte de cette relation, la première équation (36) donne $\cos 3\varphi = \frac{3\rho^2 - 10}{2\rho^3 C}$. J'écris maintenant la dernière équation (31)

$$4\rho^3 C(C^2 - 3)\cos 3\varphi + C^4 - 5 - C^2\rho^2(\rho^2 C^2 + 16) - 3\rho^4 = 0.$$

Dans cette équation je remplace $2\rho^3 C\cos 3\varphi$ par $3\rho^2 - 10$ et $C^4 - C^2\rho^2(\rho^2 C^2 + 16)$ par $C^4(1-\rho^4) - 16C^2\rho^2$ ou en tenant compte de $C^2(1+\rho^2) = 5$ et $C^2\rho^2 = 5 - C^2$ par $5C^2(1-\rho^2) - 16(5 - C^2)$; j'ai donc une équation qui devient une fois réduite

$$C^2\rho^2 + C^2 - 18\rho^2 - 25 - 3\rho^4 = 0,$$

et puisque $C^2(1+\rho^2) = 5$, j'ai simplement

$$3\rho^4 + 18\rho^2 + 20 = 0$$

qui est l'équation résolvante; ρ étant calculé, on a ensuite $C = \sqrt{\frac{5}{1+\rho^2}}$, puis φ et par suite A, A', B, B'. Ici l'équation en ρ n'ayant pas de racines réelles, nous n'obtenons pas de courbe réelle.

En raison de l'intérêt qu'une telle courbe présente pour les surfaces

applicables sur le paraboloïde, je termine les calculs. Nous avons

$$\rho^2 = \frac{-q + \varepsilon\sqrt{21}}{3},$$

ε désignant $+1$ ou -1; puis

$$C^2 = \frac{5}{1+\rho^2} = -6 - \varepsilon\sqrt{21}; \qquad C^2\rho^2 = 5 - C^2 = 11 + \varepsilon\sqrt{21}.$$

On a

$$\rho = \varepsilon' i\sqrt{\frac{9-\varepsilon\sqrt{21}}{3}}, \qquad C = \varepsilon'' i\sqrt{6+\varepsilon\sqrt{21}}, \qquad C\rho = -\varepsilon'\varepsilon''\left[\sqrt{\frac{21}{2}} + \varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}}\right],$$

$$\cos 3\varphi = \frac{3\rho^2 - 10}{2\rho^2(\rho C)} = \frac{-\varepsilon'\varepsilon''\left[3\varepsilon + 7\sqrt{21}\right]}{20\sqrt{2}}, \qquad \sin 3\varphi = \frac{-\varepsilon'\varepsilon''7\left[3\sqrt{21} + 7\varepsilon\right]}{20\sqrt{2}}.$$

J'ai désigné, par ε' et ε'', $+1$ ou -1; je n'ai pris que l'une des déterminations de $\sin 3\varphi$, car prendre l'autre revient à échanger A avec A', B avec B', ce qui revient à remplacer le cône C par son symétrique par rapport au plan zOx, ou encore par rapport à Oy; cela revient donc à faire tourner $(\mathcal{S})$ de 180° autour de Oy. On a donc $e^{3i\varphi} = \frac{-\varepsilon'\varepsilon''\left[\sqrt{21}-\varepsilon\right]}{5\sqrt{2}}$; en extrayant la racine cubique on peut se borner à une seule détermination; je prends donc

$$e^{i\varphi} = -\varepsilon'\varepsilon''\sqrt[3]{\frac{\sqrt{21}-\varepsilon}{5\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad e^{-i\varphi} = -\varepsilon'\varepsilon''\sqrt[3]{\frac{\sqrt{21}+\varepsilon}{2\sqrt{2}}},$$

d'où, finalement, tous les radicaux étant arithmétiques,

$$(37)\qquad \begin{cases} A = -i\varepsilon''\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{21}-\varepsilon}{5\sqrt{2}}}\sqrt{\dfrac{9-\varepsilon\sqrt{21}}{3}}, \\ A' = -i\varepsilon\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{21}-\varepsilon}{2\sqrt{2}}}\sqrt{\dfrac{9-\varepsilon\sqrt{21}}{3}}, \\ B = -\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{21}+\varepsilon}{2\sqrt{2}}}\left[\sqrt{\dfrac{21}{2}} + \varepsilon\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right], \\ B' = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{21}-\varepsilon}{5\sqrt{2}}}\left[\sqrt{\dfrac{21}{2}} + \varepsilon\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right], \\ C = \varepsilon'\sqrt{6+\varepsilon\sqrt{21}}. \end{cases}$$

Dans les formules (37) restent deux quantités ε, ε'' égales à ± 1; on peut se débarrasser de ε'', car le changement de signe de ε'' revient à changer de signe A, A', C, résultat que l'on peut obtenir en changeant dans les formules (35) q en $-q$, puis faisant tourner le cône C de 180° autour de Oz. Il ne reste donc, en prenant $\varepsilon'' = 1$, que deux solutions distinctes correspondant à $\varepsilon = +1$ ou -1. Chacune des deux courbes (38) que l'on obtient ainsi est symétrique par rapport au plan yOz de sa conjuguée; en effet, A, A', C étant imaginaires pures, tandis que B et B' sont réelles, le changement de q en iq_1 donne $\alpha = if(q_1)$, $\beta = i\varphi(q_1)$, où les fractions f et φ sont à coefficients réels; donc pour q_1 réel, les quantités c' et c'' sont réelles et c imaginaire pure, ce qui justifie la proposition. Les deux surfaces applicables sur le paraboloïde déduites de la courbe (38) sont unicursales, réelles et admettent yOz pour plan de symétrie. Je dois d'ailleurs faire remarquer qu'il y a lieu de considérer non seulement la courbe sphérique (35), où A, A', B, B' et C ont les valeurs (37), mais encore toutes les courbes sphériques qui s'en déduisent par la substitution signalée à la fin du Chapitre II. En négligeant un déplacement réel, on obtient donc une courbe sphérique (u_1, v_1) à trois paramètres :

$$(38)\quad \begin{cases} u = \dfrac{q^5 + Aq^4 + Bq^3 + Cq^2}{Cq^3 - B'q^2 + A'q - 1}, & v = \dfrac{q^5 - Aq^4 + Bq^3 - Cq^2}{Cq^3 + B'q^2 + A'q + 1}; \\ u_1 = \lambda u + \mu + \nu i, & v_1 = \lambda v + \mu + \nu i. \end{cases}$$

On remarquera que si μ et ν sont nulles toutes deux, le cône C_1 correspondant à la courbe (u_1, v_1) admet les deux génératrices $z = 0$, $x \pm iy = 0$; mais si cette double condition $\mu = \nu = 0$ n'est pas vérifiée, le cône C_1 admet deux génératrices isotropes non conjuguées. On peut dire encore que C est la position canonique du cône C_1, mais ceci n'a plus d'interprétation géométrique si l'on se borne aux déplacements réels. On peut remarquer que si μ est nul, u_1 et v_1 sont comme u et v imaginaires pures quand q est lui-même imaginaire pure et la même conclusion en découle, à savoir que yOz est plan de symétrie des surfaces applicables sur le paraboloïde déduites de C_1.

Le résumé de la discussion complète faite pour les cônes du cinquième degré est que nous avons eu une seule courbe réelle (A) de

degré 8, unicursale. Nous verrons que c'est la courbe réelle de degré minimum.

10. Je passe maintenant aux cônes réels unicursaux du sixième degré. J'ai dit plus haut que l'on doit envisager le cas où il y a un couple d'indice 6 et celui où il y a un couple d'indice 4, un couple d'indice 2. Soit donc le cas où il y a un couple unique d'indice 6. La directrice sphérique $(\mathfrak{C})$ a pour équations

$$(39)\qquad \alpha=\frac{q^3+\mathrm{A}q^2+\mathrm{B}q}{\mathrm{C}q^2+\mathrm{D}q+\mathrm{E}},\qquad \beta=\frac{1+\mathrm{A}'q+\mathrm{B}q^2}{\mathrm{C}q+\mathrm{D}'q^2+\mathrm{E}q^3},$$

où B, E, C sont réels; A et A′ sont imaginaires conjuguées, D et D′ aussi. Nous obtiendrons trois familles de cônes à un paramètre :

1° $\mathrm{A}=\mathrm{D}=0$, cas traité au paragraphe 6 pour $m=2$, $p=1$. Je n'y reviens pas : il y a deux plans de symétrie pour C, zOx, zOy si $\mathrm{B}>\sqrt[4]{3}$; pour $\mathrm{B}=\sqrt[4]{3}$, le cône C admet en plus les deux plans $x=y$ et $x=-y$ comme plans de symétrie;

2° A et D non nuls, mais réels, le cône C admet un seul plan de symétrie zOx;

3° A et D imaginaires, le cône C n'admet pas de plan de symétrie.

Dans les trois cas, le degré et la classe des deux cycles isotropes sont égaux à l'unité, la courbe $(\mathfrak{C})$ est du degré 10. J'indique rapidement les calculs pour la deuxième et la troisième famille.

Deuxième famille : cônes à plan de symétrie unique. — Par la méthode exposée plus haut, on obtient quatre équations entre les cinq inconnues A, B, C, D, E :

$$(40)\qquad \begin{cases} \mathrm{B}+\mathrm{EC}=0, \qquad \mathrm{A}(1+\mathrm{B})+\mathrm{D}(\mathrm{C}+\mathrm{E})=0,\\ \mathrm{DC}^2+(\mathrm{AD}+3\mathrm{E}-\mathrm{BC})\mathrm{DC}+\mathrm{AE}(\mathrm{D}^2+2\mathrm{EC})+\mathrm{BDE}^2=0,\\ \mathrm{C}^2+2\mathrm{D}^2+2\mathrm{ACD}+\mathrm{A}^2\mathrm{D}^2-\mathrm{B}^2\mathrm{C}^2\\ \quad+3\mathrm{E}^2+4\mathrm{ADE}+2\mathrm{BCE}+2\mathrm{A}^2\mathrm{E}^2+2\mathrm{ABDE}+\mathrm{B}^2\mathrm{E}^2=0. \end{cases}$$

On peut avoir une équation unique entre C et E en remplaçant partout B par $-\mathrm{CE}$, puis écrivant $\mathrm{D}=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{C}+\mathrm{E}}\rho$, $\mathrm{A}=\frac{-\mathrm{E}}{1-\mathrm{CE}}\rho$, où ρ est une

inconnue auxiliaire. La troisième équation devient alors, en posant $E - \frac{1}{E} = u$,

$$\rho^2 = C(u + C)[C(u - C) - 3],$$

et alors, écrivant la dernière équation sous la forme

$$C^2\left[E^2 + \frac{1}{E^2}\right] + 2\left[A^2 + \frac{2AD}{E} + \frac{D^2}{E_2}\right] + \frac{A^2D^2}{E^2} - C^4 + 3 - 2C^2 + \frac{2AD}{E}C\left(\frac{1}{E} - E\right) = 0,$$

on constate aisément qu'en remplaçant A, B, D par leurs valeurs en C et E, elle devient

$$[C^2u^2 - (C^4 - 3)][1 - C^2 - Cu]^2 \quad 2\rho^2[C + u][(C^2 - 1)u - 4C] + \rho^4 = 0.$$

Je récapitule :

$$(41)\quad \begin{cases} [C^2u^2 - C^4 + 3][1 - C^2 - Cu]^2 - 2\rho^2[C + u][(C^2 - 1)u - 4C] + \rho^4 = 0, \\ \rho^2 = C(u + C)[C(u - C) - 3], \\ E - \frac{1}{E} = u, \qquad D = \frac{E}{C + E}\rho, \qquad A = \frac{-E}{1 - CE}\rho, \qquad B = -EC. \end{cases}$$

La première équation (41), où ρ^2 est, bien entendu, remplacé par l'expression donnée au-dessous en C et u, représente dans un plan ωCu une courbe symétrique par rapport au point ω; le point (C, u) étant choisi, on a ρ par une extraction de racine, E par une équation du second degré, puis A, B, D rationnellement au moyen des quantités déjà calculées. Si le point (u, C) est réel, les deux valeurs de E sont réelles, mais les deux valeurs de ρ ne sont réelles que si le point (u, C) satisfait à la condition $C(u + C)[C(u - C) - 3] > 0$; les quatre systèmes correspondant pour E, ρ, A, B, D à (u, C), joints aux quatre systèmes correspondant à $(-u, -C)$, formant huit systèmes donnant le même cône à un déplacement près [changement de q en $-q$; rotation de 180° autour de Oz, ou encore échange de $\mathfrak{M}$ avec $\mathfrak{M}'$, ce qui revient à faire les échanges

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha, & \beta, & A, & C, & D, & E, & u \\ \frac{-1}{\beta}, & \frac{-1}{\alpha}, & \frac{D}{E}, & C, & \frac{-A}{E}, & \frac{-1}{E}, & u; \end{array}$$

ces trois hypothèses combinées deux à deux conduisent aux huit systèmes indiqués].

Tout revient donc à déterminer les points réels de la courbe Γ définie par la première équation (41) satisfaisant à l'inégalité $C(u+c)[C(u-c)-3]>0$. Je construis les courbes séparatrices et couvre de hachures les régions où l'expression de ρ^2 est négative. Or on constate immédiatement que la courbe Γ n'a aucun point réel à distance finie commun avec les courbes frontières $C=0$, $u+C=0$, $C(u-C)-3=0$. La conclusion sera donc que toute branche réelle de Γ, ou bien conviendra tout entière, ou bien sera tout entière à rejeter. Développons l'équation de Γ :

$$(42)\qquad \left\{\begin{array}{l} 2u^4C^2+u^3(8C^3-6C)+u^2(10C^4-23C^2) \\ \qquad +u(4C^5-30C^3-6C)+3-6C^2-13C^4=0. \end{array}\right.$$

Cette courbe est du sixième degré; l'origine est centre, les directions asymptotiques sont données par $2u(u+2C)C^2(u+C)^2=0$. Il y a donc une branche asymptote à ωC qui ne convient pas; il y a une branche asymptote à la droite $u+2C=0$, qui convient tout entière. On vérifie immédiatement que la droite $u+2C=0$ n'a aucun point commun à distance finie avec Γ et que la courbe a la disposition indiquée sur la figure.

Maintenant pour l'asymptote ωu, je pose $C=\frac{t}{u}$ et j'étudie t pour les grandes valeurs de u : l'équation (42) devient alors

$$2t^2-6t+\frac{1}{u^2}(\ldots)=0;$$

pour $\frac{1}{u}=0$, on a $t=0$ et $t=3$, d'où deux développements pour C, à savoir $C=\frac{1}{2u^3}+\ldots$ et $C=\frac{3}{u}+\frac{1}{u^3}+\ldots$, procédant suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{u}$; comme la branche d'hyperbole frontière asymptote à ωu correspond au développement $C=\frac{3}{u}+\frac{9}{u^3}+\ldots$, on voit immédiatement qu'aucune des deux branches de Γ asymptotes à ωu ne convient.

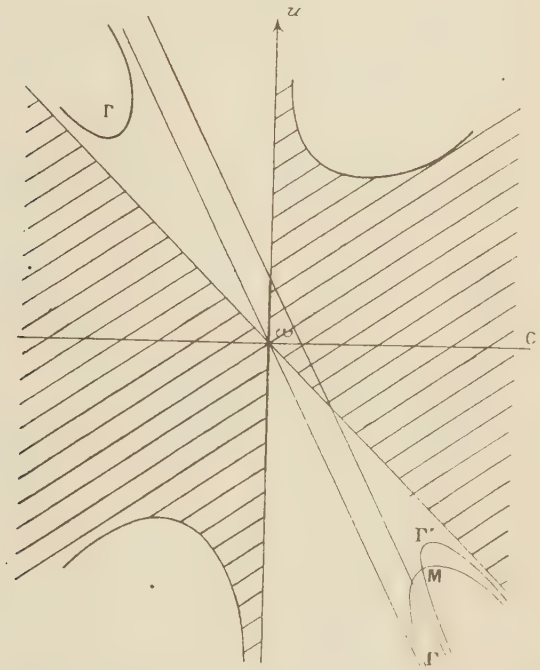
Enfin, pour la direction asymptotique $u+C=0$, j'écris $u+C=\frac{t}{C}$

et j'obtiens aisément deux développements en série convergents pour C très grand

$$u = -C + \frac{3}{2C^3} + \dots \qquad \text{et} \qquad u = -C - \frac{1}{C} - \frac{2}{C^3} + \dots,$$

dont la première ne convient pas et dont la seconde convient. Il résulte de là nécessairement que cette branche asymptote à $u + C = 0$, ne pouvant traverser les frontières des hachures non plus que la droite $u + 2C = 0$ doit aller rejoindre la branche asymptote à la droite $u + 2C = 0$; on a donc entre les deux droites $u + C = 0$, $u + 2C = 0$ une branche de courbe réelle soit dans le deuxième, soit dans le quatrième quadrant donnant des courbes réelles (-1.) dépendant d'un paramètre arbitraire.

Fig. 5.



Pour les branches à négliger de Γ, que je ne construirai pas, on a

C, u réels, E est réel; ρ, D, A sont imaginaires pures; donc pour q imaginaire pure, α et β sont imaginaires pures, circonstance déjà réalisée; les surfaces applicables sur le paraboloïde déduites de ces courbes imaginaires admettent yOz comme plan de symétrie.

12. J'ouvre une digression qui sera utile pour un problème ultérieur. Cherchons les génératrices d'intersection de ces cônes réels C avec le plan de symétrie zOx; j'écris l'équation $\alpha = \beta$ qui donne $c' = 0$; on a

$$\frac{q^3 + Aq^2 - ECq}{Cq^2 + Dq + E} = \frac{1 + Aq - ECq^2}{Cq + Dq^2 + Eq^3},$$

équation réciproque admettant $q = 1$ et $q = -1$ comme racines, on a ainsi deux génératrices simples le long desquelles le cône C est normal au plan zOx. Ces deux racines enlevées, il reste l'équation réciproque

$$(43)\quad E(q^4 + q^2 + 1) + (AE + D)q(q^2 + 1) + (C - E^2C + AD + EC^2)q^2 = 0.$$

Si q_1 est racine, $\frac{1}{q_1}$ aussi est racine; à ces deux valeurs de q correspondent deux nappes du cône C se croisant le long d'une même génératrice double du cône C; or si q_1 tend vers l'unité, $\frac{1}{q_1}$ aussi, de sorte que si $q = 1$ est racine de cette équation, c'est en même temps une racine double : à cette racine double correspond une génératrice de rebroussement de C; on vérifie aisément que $\frac{d\alpha}{dq}$, $\frac{d\beta}{dq}$ sont nulles, de sorte que (43) admet un rebroussement dans le plan zOx, la tangente étant dans le plan zOx; d'ailleurs nous avons vu que $c' = 0$ admettait alors $q = 1$ pour racine triple; le cône C admet une génératrice de rebroussement dans le plan zOx, le long de laquelle zOx est le plan tangent. En écrivant que l'équation (43) admet $q = 1$ pour racine, on a $C\left(\frac{1}{E} - E\right) + C^2 + 3 + 2\left(A + \frac{D}{E}\right) + \frac{AD}{E} = 0$, et en remplaçant A, D, E en u, C, ρ, on a $\rho^2 + 2(2C + u)\rho + (Cu + C^2 - 1)(C^2 + 3 - Cu) = 0$ ou, en tenant compte de la valeur trouvée pour ρ^2 simplement, $2(2C + u)\rho = C^2 + 3 - Cu$. En portant cette valeur de ρ, à savoir $\frac{C^2 + 3 - Cu}{2(2C + u)}$ dans l'expression trouvée pour ρ^2, on a l'équation

$$(44)\qquad 4C(u + C)(2C + u)^2 - (Cu - C^2 - 3) = 0.$$

Cette équation représente une courbe Γ' du quatrième degré dont il suffit d'obtenir les points d'intersection avec Γ pour obtenir un cône C à génératrice de rebroussement dans le plan zOx. Si le point d'intersection est réel, le cône C est réel, car, pour un tel point, $\rho = \frac{C^2+3-Cu}{2(2C+u)}$. La courbe Γ' satisfait comme Γ à l'inégalité $C(u+C)(Cu-C^2-3)>0$, elle n'a aucun point réel à distance finie avec les frontières : elle est du quatrième degré, admet l'origine pour centre. On trouve aisément que Γ' est asymptote à la droite $u+C=0$ avec le développement $u=-C-\frac{1}{2C}+\frac{1}{8C^3}+\dots$, tandis que la branche trouvée pour Γ correspond au développement $u=-C-\frac{1}{C}-\frac{2}{C^3}+\dots$. D'autre part, la droite $u+2C=\frac{\sqrt{3}}{2}$ est asymptote à Γ'; en tenant compte de ce fait que Γ' ne peut entrer dans les régions hachurées et de la disposition que Γ' offre par rapport à l'asymptote en question, on voit que Γ' possède une branche comprise entre les deux droites $u+C=0$, $u+2C=\frac{\sqrt{3}}{2}$ coupant nécessairement Γ en un point M réel conformément à la figure : l'ordre de multiplicité de M dans l'intersection de Γ et Γ' est ou l'unité ou un nombre impair.

Nous verrons plus loin l'utilité de cette digression. Je résume le résultat. Si je me suis proposé le problème suivant : « Trouver un cône unicursal C du sixième degré, n'ayant que les deux génératrices isotropes $z=0$, $x\pm iy=0$, admettant zOx pour plan de symétrie, ayant une génératrice de rebroussement dans ce plan, et donnant une courbe (4) unicursale », j'ai obtenu cinq équations à cinq inconnues. Les inconnues sont A, B, C, D, E; les équations sont les quatre équations (40) et l'équation

$$C\left(\frac{1}{E}-E\right)+C^2+3+2\left(A+\frac{D}{E}\right)+\frac{AD}{E}=0.$$

J'ai obtenu, par le point M, une solution de ce système : j'ai besoin de l'ordre de multiplicité de cette solution A_0, B_0, C_0, D_0, E_0. Je fais remarquer qu'il était légitime de remplacer partout dans mes cinq équations B par $-EC$, puis A par $\frac{-E}{1-CE}\rho$, D par $\frac{E}{C+E}\rho$, de façon à n'avoir plus

que trois équations à trois inconnues E, C, ρ; l'ordre de multiplicité de la solution $A_0 B_0 C_0 D_0 E_0$ du système primitif est bien le même que l'ordre de E_0, C_0, ρ_0 pour le nouveau. Il est légitime aussi de faire le changement de variable $E - \frac{1}{E} = u$; à toute solution du système C, u, ρ correspondent deux solutions distinctes (C, E, ρ) ou $\left(C, \frac{-1}{E}, \rho\right)$ du système en C, E, ρ et l'ordre est conservé, pourvu que $u \neq \pm 2i$ ou $E \neq \pm i$, ce qui est le cas. Or mon système définitif en C, u, ρ se trouve être

$$\Gamma = 0, \qquad \Gamma' = 0, \qquad \rho = \frac{C^2 + 3 - Cu}{2(2C + u)},$$

Γ et Γ' ne renfermant que u et C; l'ordre de multiplicité de la solution (C, u, ρ) est donc simplement l'ordre de multiplicité du point d'intersection des deux courbes Γ et Γ' : pour le point M, on a un ordre probablement égal à l'unité, mais en tous cas impair. Ceci sera utilisé plus tard.

13. *Troisième famille des cônes du sixième degré à un seul couple isotrope, famille n'ayant aucun plan de symétrie.* — J'écris

$$(45) \qquad \alpha = \frac{q^3 + (a + ia')q^2 - EC q}{Cq^2 + (d + id')q + E}, \qquad \beta = \frac{1 + (a - ia')q - EC q^2}{Cq + (d - id')q^2 + Eq^3},$$

de façon à mettre en évidence des quantités toutes réelles. Par la méthode habituelle j'obtiens

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(1 + B) + d(C + E) = 0 \qquad a'(1 - B) + d'(C - E) = 0, \\ d[C^2 + (3E - BC)C + BE^2] \\ \quad + Ca(d^2 + d'^2) + 2aCE^2 + E[a(d^2 - d'^2) + 2a'dd'] = 0, \\ d'[C^2 - (3E - BC)C - BE^2] \\ \quad + Ca'(d^2 + d'^2) + 2a'CE^2 + E[a'(d'^2 - d^2) - 2add'] = 0, \\ C^2\left[\frac{1}{E^2} + E^2 - 2\right] + 2\left(\frac{d^2 + d'^2}{E^2} + a^2 + a'^2\right) + 2C\left(\frac{1}{E} - E\right)\frac{ad + a'd'}{E} \\ \quad + \frac{(a^2 + a'^2)(d^2 + d'^2)}{E^2} - C^2 + 4\frac{ad - a'd'}{E} + 3 = 0. \end{array} \right.$$

On a cinq équations à six inconnues a, a', d, d', C, E; B est mis à la place de $-CE$. La résolution du système (46) est au fond très simple;

pour une même courbe (Σ), abstraction faite d'un déplacement, nous trouvons trente-deux solutions du système (46). En effet, faire tourner C de 180° autour de Oz revient à changer de signe C, E, d, d'. Faire tourner le cône C de 180° autour de Oy est équivalent, en raison de la symétrie de C par rapport à O, à prendre le symétrique de C par rapport à zOx ou à échanger α et β : cela revient, en échangeant en même temps q avec $\frac{1}{q}$, à changer de signe a' et d'; changer q en $-q$ revient à changer de signe a, a', C, E; faire tourner C de 90° autour de Oz revient, si l'on remplace en même temps q par iq, à faire les échanges

$$\begin{array}{cccccc} a, & a', & C, & d, & d', & E, \\ a', & -a, & -C, & -d', & d, & E. \end{array}$$

Enfin échanger (𝔄) avec (𝔄′) revient aux échanges

$$\begin{array}{cccccccc} \alpha, & \beta, & a, & a', & d, & d', & C, & E, \\ \dfrac{-1}{\beta}, & \dfrac{-1}{\alpha}, & \dfrac{d}{E}, & \dfrac{-d'}{E}, & \dfrac{-a}{E}, & \dfrac{a'}{E}, & C, & \dfrac{-1}{E}. \end{array}$$

La composition de chacun de ces cinq procédés à deux alternatives chacun donne trente-deux solutions équivalentes. Ceci conduit aisément au changement d'inconnues

$$(47) \qquad \frac{a}{C+E} = \frac{-d}{1-EC} = \rho, \qquad \frac{a'}{-C+E} = \frac{d'}{1+EC} = \rho',$$

qui diminue d'ailleurs de 2 le nombre total d'inconnues. Si l'on remplace a, a', d, d' dans les troisième et quatrième équations (46), en supprimant le facteur ρ ou ρ' qui ne peut être nul qu'à condition de reprendre la première ou deuxième famille, on obtient deux équations du premier degré en ρ^2 et ρ'^2 faciles à résoudre, donnant, en posant $E - \frac{1}{E} = u$,

$$(48) \quad \rho^2 = \frac{-C(2C-u)(C^2-Cu+3)}{4(C^2+Cu-1)(C^2+1)}, \qquad \rho'^2 = \frac{-C(2C+u)(C^2+Cu+3)}{4(C^2+Cu-1)(C^2+1)}.$$

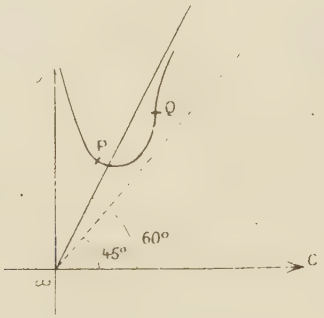
En remplaçant dans la dernière équation a, d, a', d', en ρ, ρ', C, E, cette équation ne renferme plus que C, E, ρ^2, ρ'^2, ce qui permet, en tenant compte de (48), d'obtenir la relation unique, que je mets sous

deux formes équivalentes :

$$(49)\qquad \begin{cases} 2C^2u^4-(5C^4-11C^2)u^2-(3-3C^2+29C^4+3C^6)=0, \\ u^2=\dfrac{5C^2-11}{4}\pm\dfrac{C^2+1}{4C}\sqrt{49C^2+24}. \end{cases}$$

Cette équation représente dans le plan ωCu une courbe admettant ωC, ωu pour axes. L'expression $3x^3+29x^2-3x+3$ n'a qu'une racine réelle négative, car la dérivée d'homogénéité $29x^2-6x+9$ a ses racines imaginaires; donc C étant réel, l'équation bicarrée (49) en u a deux racines en u^2 réelles dont on ne prend que la positive : sous la seconde forme, on prend donc le signe + si C est positif, le signe − si C est négatif. Une fois le point u, C choisi sur la courbe (49), on calcule ρ, ρ' par (48), E par la relation $E-\frac{1}{E}=u$ et les formules (47) donnent a, a', d, d'. A chaque point u, C correspondent huit systèmes pour ρ, ρ', E, et en associant les quatre points (u, C), $(-u, C)$,

Fig. 6.



$(u, -C)$, $(-u, -C)$, on a l'ensemble des trente-deux solutions équivalentes. La seule condition de réalité est que ρ^2 et ρ'^2 soient positifs. Je peux me borner à supposer C et u positifs, Si C est réel positif, la valeur réelle positive de u est $u=+\sqrt{\frac{5C^2-11}{4}+\frac{C^2+1}{4C}\sqrt{49C^2+24}}$. Le point (u, C) décrit alors une courbe Γ asymptote à ωu et à la droite $u=C\sqrt{3}$. On vérifie aisément que la droite $u=C$ n'a pas de points communs avec Γ; donc puisque nous sommes dans le premier quadrant,

pour tous les points de Γ, ρ'^2 est positif, car le numérateur de ρ'^2 est négatif; le dénominateur égalé à zéro donne l'hyperbole $u = C - \frac{1}{C}$ tout entière en dessous de l'asymptote $u = C$, par suite sans point commun avec Γ; le dénominateur de ρ'^2 est donc lui aussi négatif. Il reste donc à écrire que ρ^2 est positif ou $(u - 2C)(C^2 - Cu + 3)(C^2 + Cu - 1) > 0$. L'intersection de Γ avec la droite $u = 2C$ conduit à l'équation $(3C^2 - 1)(C^2 + 1)^2 = 0$; l'intersection de Γ avec l'hyperbole $Cu = 1 - C^2$ conduit à l'équation $(3C^2 - 1)(C^2 + 1)^3 = 0$; l'intersection de Γ avec la courbe $Cu = C^2 + 3$ conduit à l'équation $(C^4 + 2C^2 - 27)(C^2 + 1)^2 = 0$, d'où $C^2 = -1 + \sqrt{28}$; je marque donc le point P de Γ correspondant à $C = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et le point Q correspondant à $C = \sqrt{-1 + \sqrt{28}}$; le point P n'est pas frontière, mais Q est frontière et l'on voit aisément que l'arc partant de Q pour rejoindre l'asymptote à 60° convient seul. On peut d'ailleurs remarquer qu'au point Q, on a $\rho = 0$, donc $a = d = 0$ et, d'après ce qui a été expliqué, le cône correspondant admet yOz comme plan de symétrie et, par suite, rentre dans la famille précédemment déterminée.

Il n'est pas sans intérêt de faire remarquer que l'arc réel négligé sur Γ donne des surfaces réelles applicables sur le paraboloïde admettant yOz comme plan de symétrie : en effet, nous avons dit que ρ'^2 était positif, mais ρ^2 négatif, tout le long de cet arc : alors a et d sont imaginaires pures, a' et d' réels, de sorte que $a + ia'$, $d + id'$, $a - ia'$, $d - id'$ sont eux-mêmes imaginaires pures, et si q est lui-même imaginaire pure, c est imaginaire pure, c' et c'' sont réels : proposition déjà rencontrée. Les surfaces applicables sur le paraboloïde ont alors yOz pour plan de symétrie.

14. Je passe maintenant aux cônes unicursaux réels de degré 6 admettant un premier couple isotrope d'indice 4 et un second d'indice 2. Les équations de la courbe (Ω) seront alors réductibles à la forme

$$(50)\quad \alpha = \frac{(q+k)^3}{(kq+1)k(aq^2+bq+c)}, \qquad \beta = \frac{\left(q+\frac{1}{k}\right)^3}{\left(\frac{q}{k}+1\right)\frac{1}{k}(cq^2+bq+a)},$$

où a, b, c, k sont réels; on a amené le cône C dans sa position canonique en supposant que le couple d'indice 2 se compose des deux droites $z=0$, $x\pm iy=0$ obtenues pour $q=-k$ ou $q=-\frac{1}{k}$ et que $q=0$ et $q=\infty$ donnent les deux génératrices d'indice 4. Les deux génératrices d'indice 2 ne donnent aucune relation, et les deux génératrices d'indice 4 donnent deux relations fixant l'indice et deux relations résiduelles. On obtient quatre équations à coefficients réels entre a, b, c, k qui, malheureusement, n'admettent aucune solution réelle. En négligeant les déplacements, on n'obtient qu'une solution imaginaire

$$(51)\quad \alpha=\frac{(q+i)^3}{(-q+i)\left(q^2+\frac{7iq}{4}-1\right)},\qquad \beta=\frac{(q-i)^3}{-(q+i)\left(-q^2+\frac{7iq}{4}+1\right)}$$

possédant la propriété intéressante de définir une courbe $(\mathfrak{M})$ imaginaire, mais réelle au sens de M. Goursat. Je change en effet q en iq et j'ai les équations

$$(52)\qquad \alpha=\frac{(q+1)^3}{(1-q)\left(q^2+\frac{7q}{4}+1\right)},\qquad \beta=\frac{(q-1)^3}{(q+1)\left[q^2-\frac{7q}{4}+1\right]}$$

rentrant dans la forme canonique $\alpha=F(q)$, $\beta=F_0\left(\frac{-1}{q}\right)$ que j'indique dans mon Mémoire sur le paraboloïde, F désignant une fraction rationnelle, F_0 la fraction conjuguée. Le cône C est réel, au sens de M. Goursat; on obtient deux surfaces réelles unicursales à centre applicables sur le paraboloïde; le fait que F est réelle, entraine de plus que zOx est plan de symétrie des deux surfaces.

La surface minima M_0 est réelle, admet zOx pour plan de symétrie.

La courbe $(\mathfrak{M})$ avec un choix convenable des constantes d'intégration est réelle (G). Elle est du degré 8.

La discussion qui vient d'être achevée complètement pour les cônes de degré 4, 5, 6 montre qu'il n'y a pas de courbe réelle unicursale de degré 6, car pour une telle courbe le degré du cône C satisferait à l'inégalité $m\leq 6<2m$ et m devrait donc être égal à 4, 5, 6. La courbe réelle (au sens vulgaire) dérivée du cône réel du cinquième degré (§ 7 et 10) et la courbe réelle (au sens de M. Goursat) trouvée à l'instant

sont du huitième degré et sont les courbes réelles unicursales de plus faible degré dont le rayon de torsion est constant.

15. J'achève ce Chapitre par une étude sommaire des cônes réels unicursaux de degré 8; les couples de génératrices isotropes conjugués ont pour indice i_1, i_2, ... avec la relation $i_1 + i_2 + \ldots = 8$. Comme quatre indices 2 sont impossibles, on ne peut avoir d'autres solutions que $i_1 = 8$; ou $i_1 = 6$, $i_2 = 2$; ou $i_1 = 4$, $i_2 = 3$; ou $i_1 = 4$, $i_1 = 2$, $i_3 = 2$.

Je m'occupe uniquement des deux premiers cas. Dans le premier j'écris

$$(53) \qquad \alpha = \frac{q^4 + Aq^3 + Bq^2 + Cq}{Dq^3 + Eq^2 + Fq + G}, \qquad \beta = \frac{1 + A'q + B'q^2 + Cq^3}{Dq + E'q^2 + F'q^3 + Gq^4},$$

C, D, G étant réelles; A, A', puis B et B', ou E et E', ou encore F et F' sont quatre couples de constantes imaginaires conjuguées; au total onze inconnues. L'identité

$$(54) \qquad \begin{aligned} &(q^3 + Aq^2 + Bq + C)(1 + A'q + B'q^2 + Cq^3) \\ &\quad + (Dq^3 + Eq^2 + Fq + G)(D + E'q + F'q^2 + Gq^3) \\ &\equiv (1 + AA' + BB' + C^2 + EE' + FF' + G^2)q^3 \end{aligned}$$

donne cinq relations; il y a ensuite trois relations résiduelles. On peut donc espérer obtenir des solutions dépendant de trois paramètres arbitraires.

Les calculs n'ayant en eux-mêmes aucun intérêt, cherchons des cas de simplifications : il y a d'abord le cas où A, B, E, F sont réels, le plan zOx est alors un plan de symétrie coupant le cône C suivant deux génératrices simples réelles correspondant à $q = \pm 1$; le nombre des inconnues s'abaisse à sept, l'identité (54) ne donne que trois équations, les relations résiduelles se réduisent à deux; on obtient un groupe de solutions à deux paramètres contenu dans l'ensemble à trois paramètres du cas général.

Il y a un autre genre de symétrie qu'on peut mettre en évidence ici, car en écrivant

$$(55) \qquad \alpha = \frac{q^4 + Aq^3 + Bq^2 + Cq}{-Cq^3 + B'q^2 - A'q + 1}, \qquad \beta = \frac{1 + A'q + B'q^2 + Cq^3}{-Cq + Bq^2 - Aq^3 + q^4},$$

le changement de q en $-q$ change α en $\frac{1}{\beta}$ et β en $\frac{1}{\alpha}$, d'où symétrie par rapport à xOy; cette fois le plan de symétrie coupe le cône C suivant deux génératrices simples $q=0$, $q=\infty$ imaginaires, qui sont précisément nos deux génératrices isotropes. Les inconnues sont C, réel; A et A', puis B et B', deux couples d'imaginaires conjuguées. Les cinq inconnues sont liées par deux équations $B'+AC=0$ et $B+A'C=0$ provenant de l'identité (54); maintenant si nous rappelons qu'il suffit d'étudier les trois intégrales $\int c''\,dc$, $\int c''\,dc$, $\int c\,dc'$, on remarquera que c'', $\frac{dc}{dq}$, $\frac{dc'}{dq}$ sont des fonctions impaires de q, de sorte que $c''\frac{dc}{dq}$ et $c''\frac{dc'}{dq}$ ne contiennent pas de terme en $\frac{1}{q}$, les deux premières intégrales sont automatiquement algébriques et l'on n'obtient qu'une condition résiduelle.

Les deux sortes de symétrie envisagées ici successivement correspondent aux deux cas prévus *a priori* (Chap. II, § 9); dans le premier cas, les deux vecteurs périodes sont perpendiculaires à l'axe de symétrie (Oy) du cône C et directement opposés; dans le second cas, ils sont portés par l'axe de symétrie (Oz) du cône C.

Je termine les calculs relatifs au second cas de symétrie. Les cinq inconnues C, A, A', B, B' vérifient le système des trois équations

$$(56)\qquad \begin{cases} B'+AC=0, \qquad B+A'C=0, \\ C^4-A^2A'^2-2C(A^3+A'^3)-4AA'C^2-2=0, \end{cases}$$

en posant $A=\rho e^{i\omega}$, $A'=\rho e^{-i\omega}$, $B=-C\rho e^{-i\omega}$, $B'=-C\rho e^{i\omega}$, j'ai une équation unique entre ρ et ω :

$$(57)\qquad \cos 3\omega=\frac{C^4-\rho^4-4\rho^2C^2-2}{4C\rho^2}.$$

Le point réel C, ρ étant fixé dans le plan $\omega C\rho$ avec la relation restrictive $|\cos 3\omega|<1$, l'angle ω peut recevoir six valeurs distinctes comprises entre $-\pi$ et $+\pi$; en rassemblant les quatre points (C,ρ), $(-C,\rho)$ $(C,-\rho)$, et $(-C,-\rho)$ on a vingt-quatre solutions donnant, sauf déplacement, la même courbe $(\mathcal{A})$. L'inégalité à écrire revient à

$$(58)\qquad (C^4-\rho^4-4\rho^2C^2-2-4C\rho^3)(C^4-\rho^4-4\rho C^2-2+4C\rho^3)<0.$$

Chacune des deux courbes séparatrices admet ω pour centre; elles

sont symétriques l'une de l'autre par rapport à ωC ou $\omega\rho$. Elles sont faciles à construire. L'équation de la première par exemple s'écrit $C^4-(\rho^2+2C\rho)^2-2=0$ ou encore $(C+\rho)^2(C^2-2C\rho-\rho^2)=2$. En posant $\rho=\lambda-C$, où λ est un paramètre, on a

$$C=\frac{\sqrt{\lambda^4+2}}{\lambda\sqrt{2}},\qquad \rho=\lambda-\frac{\sqrt{\lambda^4+2}}{\lambda\sqrt{2}}$$

qui permettent de construire très simplement la courbe. On pourra remarquer, une fois les régions déterminées, que si le point (C,ρ) vient sur l'une des frontières, par exemple sur la courbe $\cos 3\omega=1$, on a $\omega=0$, A et A′ sont réelles, ainsi que B et B′ : on a donc un cône admettant en plus xOz comme plan de symétrie et dépendant d'un seul paramètre.

Cet exemple a été obtenu par M. Fabry; le lecteur se rendra compte de la simplification apportée aux calculs par la méthode suivie ici.

Si le point C,ρ est choisi dans les régions négligées jusqu'ici, $\cos 3\omega$ est réel, $\sin 3\omega$ est une imaginaire pure; $\cos 3\omega+i\sin 3\omega$ est un nombre réel, on pourra se borner à la racine cubique réelle pour $\cos\omega+i\sin\omega$, de sorte que A, B, C, A′, B′ prennent des valeurs toutes réelles; pour q réel, α et β sont réelles, c et c'' sont réelles et c' imaginaire pure; la courbe (58) est imaginaire, symétrique par rapport à xOz de sa conjuguée, de sorte que les surfaces applicables sur le paraboloïde déduites dans ce cas de (58) admettent xOz pour plan de symétrie; comme (58) admet xOy pour plan de symétrie, l'axe Oz est axe de symétrie de ces surfaces et, par suite, yOz en est un second plan de symétrie.

16. J'aborde maintenant le cas où le cône C unicursal du huitième degré admet deux génératrices conjuguées d'indice 2 et deux génératrices conjuguées d'indice 6. Pour simplifier, je suppose de plus que zOx soit plan de symétrie; j'écris les équations de (58)

$$\alpha=\frac{(q-k)^3(q+m)}{(kq-1)(Aq^3+Bq^2+Cq+D)},$$
$$\beta=\frac{(1-kq)^3(1+mq)}{(k-q)(A+Bq+Cq^2+Dq^3)},\tag{59}$$

où A, B, C, D, k, m sont six constantes à déterminer. Toutes les con-

ditions d'indice et de résidus relatives aux génératrices $z=0$, $x=\pm iy$ données par $q=k$ ou $q=\frac{1}{k}$ ont été déjà exprimées. J'écris l'identité

$$(60)\quad \begin{aligned}&(q-k)^2(kq-1)^2(q+m)(1+mq)\\&\quad+(Aq^3+Bq^2+Cq+D)(A+Bq+Cq^2+Dq^3)\\&\equiv[1+(m-2k)^2+(k^2-2km)^2+m^2k^4+A^2+B^2+C^2+D^2]q^3\end{aligned}$$

fournissant trois équations exprimant que le couple isotrope $q=0$, $q=\infty$ a pour indice 6. Le vecteur période relatif à $q=0$ est nul moyennant deux équations complémentaires. On a donc un système de cinq équations à six inconnues dont un raisonnement très simple va prouver l'existence de solutions réelles à un paramètre. Il suffit de remarquer que si k devient égal à 1 ou -1, les formules (59) se simplifient; la courbe $(\mathfrak{W})$ et le cône C s'abaissent au sixième degré; l'identité (60) exprime alors que le cône C a un couple isotrope unique d'indice 6 et les équations résiduelles obtenues continuent, quand on y fait $k=1$ ou -1, à exprimer que le couple isotrope d'indice 6 ne donne pas de singularité logarithmique. Il nous suffit d'ailleurs de nous borner à $k=1$; nous remarquons que ce cône dégénéré du sixième degré admet pour $q=1$ la génératrice Oz comme génératrice de rebroussement, le plan zOx étant le plan tangent le long de cette génératrice. Mais alors nous reconnaissons le cône du sixième degré qui a été déterminé directement au paragraphe 12 (sauf rotation autour de Oy de façon à ce que Oz coïncide avec la génératrice de rebroussement). La conclusion est donc la suivante : pour $k\neq 1$, nous avons un cône du huitième degré obtenu en résolvant un système de cinq équations à six inconnues ; ce système, où k est l'une des inconnues, admet une solution réelle, d'ordre de multiplicité impair, quand on y fait $k=1$. On peut donc prendre k comme paramètre et développer la solution générale du système suivant les puissances croissantes de $k-1$ en séries entières à coefficients réels, convergentes pour $k-1$ suffisamment petit en module. Il est donc bien établi que nous avons une infinité de cônes réels du huitième degré répondant aux conditions de l'énoncé.

J'ajoute simplement quelques mots pour bien vérifier ce que deviennent les cinq équations du problème quand k tend vers 1. Les équa-

tions (59) donnent, en tenant compte de (60) :

$$(61)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dq} = \dfrac{(q-k)^2 P}{(kq-1)^2(Aq^3+Bq^2+Cq+D)^2}, \\ 1+\alpha\beta = \dfrac{\lambda q^3}{(Aq^3+Bq^2+Cq+D)(A+Bq+Cq^2+Dq^3)}, \end{cases}$$

où P est un polynome du quatrième degré et λ une constante.

On déduit de là

$$\frac{\dfrac{d\alpha}{dq}}{(1+\alpha\beta)^2} = \frac{(qk)^2 P(A+Bq+Cq^2+Dq^3)^2}{\lambda^2(kq-1)^2 q^6}$$

et, par suite,

$$(62)\qquad \begin{cases} \dfrac{\beta^2\dfrac{d\alpha}{dq}}{(1+\alpha\beta)^2} = \dfrac{(kq-1)^2(1+mq)^2 P}{\lambda^2 q^6}, \\ \dfrac{\beta\dfrac{d\alpha}{dq}}{(1+\alpha\beta)^2} = \dfrac{(q-k)(kq-1)(1+mq)(A+Bq+Cq^2+Dq^3)P}{\lambda^2 q^6}. \end{cases}$$

Nous savons qu'une fois l'identité (60) vérifiée, il suffit d'étudier les trois intégrales $\int \frac{\beta^2 d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}$, $\int \frac{\alpha^2 d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}$, $\int \frac{\beta d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}$ dont les deux premières se ramènent d'ailleurs, en raison de la symétrie $z0x$, l'une à l'autre. Les formules (62) montrent clairement que le vecteur période relatif à l'une ou l'autre des génératrices isotropes $q=k$ ou $q=\frac{1}{k}$ est nul. Les deux conditions résiduelles s'obtiennent en écrivant que les deux numérateurs des fractions (62) ne contiennent pas de terme en q^5.

Si l'on fait $k=1$, la directrice (65) est remplacée par la courbe

$$(59')\qquad \alpha = \frac{(q-1)^2(q+m)}{Aq^3+Bq^2+Cq+D}, \qquad \beta = \frac{(q-1)^2(1+mq)}{A+Bq+Cq^2+Dq^3};$$

l'identité (60) où l'on remplace k par 1 est bien celle qui exprime que cette courbe (65') n'a que deux points à l'infini. La dérivée $\frac{dz}{dq}$ peut s'obtenir soit en dérivant directement (59'), soit en recopiant la

dérivée calculée sur (59) et faisant ensuite $k=1$, puis simplifiant, on a donc

$$\frac{d\alpha}{dq}=\frac{P}{(Aq^3+Bq^2+Cq+D)^2},$$

où P est le polynome précédemment obtenu, où k a été ensuite remplacé par 1. Et l'on a ensuite

$$(62')\qquad \begin{cases} \dfrac{\beta^2\dfrac{d\alpha}{dq}}{(1+\alpha\beta)^2}=\dfrac{(q-1)^4(1+mq)^2P}{\lambda^2q^6}, \\ \dfrac{\beta\dfrac{d\alpha}{dq}}{(1+\alpha\beta)^2}=\dfrac{(q-1)^3(1+mq)(A+Bq+Cq^2+Dq^3)P}{\lambda^2q^6}, \end{cases}$$

toujours en recopiant (62) et remplaçant k par 1. La méthode est donc bien justifiée.

Les courbes unicursales (4) obtenues ici sont du degré 14, le cône C étant du huitième degré et ayant quatre cycles isotropes de degré 1.

17. Je me borne à ces exemples numériques; le lecteur peut se rendre compte que les calculs deviennent rapidement inabordables.

Je renvoie au Mémoire de M. Fabry pour la comparaison des exemples; M. Fabry a cité seulement quatre types réels; le premier est celui que j'ai trouvé au paragraphe 7, où les entiers m et p sont quelconques, mais obtenu par M. Fabry uniquement dans le cas où le paramètre que j'ai appelé B a sa valeur limite $\sqrt[4]{\dfrac{m+p}{m-p}}$.

Le second est constitué par les cônes obtenus au même paragraphe 7 en donnant à m la valeur 2 et à p la valeur 1, ce sont les cônes du sixième degré à deux plans de symétrie; l'exemple du paragraphe 7 est donc une généralisation de deux types de M. Fabry.

Un troisième type de M. Fabry est celui que j'ai retrouvé au paragraphe 15 : cônes du huitième degré à un seul couple isotrope. Cet exemple est peut-être celui qui montre le mieux la simplification des calculs.

Le quatrième type de M. Fabry est un cône du dixième degré que je n'ai pas cru devoir retrouver, les calculs n'ayant qu'un intérêt médiocre,

Tous ces exemples sont du type : cône des binormales unicursal ne possédant qu'un couple isotrope.

L'exemple que je donne au paragraphe 16 est fondamental pour prouver qu'il existe des cônes réels (au sens vulgaire) ayant plusieurs couples de génératrices isotropes conjuguées. L'exemple du paragraphe 14 donne aussi un type dans ce genre, à condition de prendre le mot *réel* au sens de M. Goursat. Enfin cet exemple du paragraphe 16 est fondamental aussi, par la méthode employée, qui nous permet d'esquiver la résolution et même la formation de systèmes d'équations inabordables à une discussion directe. Il suffit dans beaucoup de cas de mettre en évidence dans une famille de cônes un cône particulier dégénéré pour établir l'existence et la réalité de toute la famille.

Pour les courbes complètement imaginaires, j'ai de même indiqué des cônes de degré arbitrairement grand possédant une, deux ou trois génératrices isotropes, avec un nombre de cycles isotropes lui-même arbitraire; les seuls connus jusqu'ici n'avaient qu'un cycle isotrope, je les ai retrouvés en les rattachant à l'identité de Bezout.

La théorie des surfaces minima et la théorie des surfaces applicables sur le paraboloïde se sont trouvées en même temps notablement enrichies.

Dans les Chapitres qui suivent nous construirons des cônes unicursaux à directrice sphérique cette fois non unicursale, puis des cônes non unicursaux.

CHAPITRE IV.

SYMÉTRIES, ROTATIONS. EXEMPLES DE COURBES UNICURSALES ADMETTANT UN NOMBRE ARBITRAIRE DE POINTS A L'INFINI. INDICATRICES DES TORSIONS NON UNICURSALES.

1. J'énonce quelques résultats relatifs au cas où le cône C admet un plan de symétrie π; la perpendiculaire Δ élevée à π par le sommet du cône se trouve être axe de symétrie du cône C. La courbe (Γ) supposée algébrique admet pour axe de symétrie une certaine droite Δ' parallèle à Δ.

La directrice sphérique *complète* de C admet à la fois π ou Δ pour plan ou axe de symétrie; si elle est indécomposable, rien de plus à dire. Mais si elle se décompose en deux courbes $(\mathfrak{G})$ et $(\mathfrak{G}')$, deux cas sont à distinguer :

1° $(\mathfrak{G})$ admet π pour plan de symétrie; $(\mathfrak{G}')$ aussi; les deux courbes $(\mathfrak{G})$ et $(\mathfrak{G}')$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à Δ;

2° $(\mathfrak{G})$ admet Δ pour axe de symétrie; $(\mathfrak{G}')$ aussi; les deux courbes $(\mathfrak{G})$ et $(\mathfrak{G}')$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport au plan π.

J'étudierai d'abord le cas où $(\mathfrak{G})$ supposée unicursale admet un plan de symétrie. D'une façon générale, si une courbe unicursale plane ou gauche, sphérique ou non, admet un plan π de symétrie, les paramètres t et t' de deux points symétriques M et M′ sont liés par une relation involutive $Att' + B(t + t') + C = 0$. Si la courbe est réelle, supposons t réel pour les points réels; deux cas sont à distinguer suivant que l'équation $At^2 + 2Bt + C = 0$, qui fournit les éléments doubles de cette involution, a ses racines réelles ou imaginaires. Si les racines sont réelles, à chacune correspond un point réel coïncidant avec son symétrique, donc situé dans le plan de symétrie ou rejeté à l'infini dans la direction perpendiculaire; donc le plan π coupe la courbe en deux points simples réels (ou 1, ou 0) et s'il a d'autres points avec la courbe, ces points sont nécessairement doubles ou multiples d'ordre pair. Par une substitution homographique préalable sur t, on peut supposer que la relation involutive est $t + t' = 0$; supposons que M parcoure toute la courbe, le point symétrique M′ la parcourra aussi tout entière, en sens inverse de M, les deux points M et M′ se croisent deux fois aux points doubles de l'involution. L'ellipse offre cette disposition par rapport à l'un ou l'autre de ses deux axes; la lemniscate $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ l'offre dans la symétrie relative à Ox.

Dans le cas où les éléments doubles de l'involution sont imaginaires, on peut supposer la relation involutive réduite à la forme $tt' + 1 = 0$. En dehors de points multiples, le plan π ne peut avoir de points réels communs avec la courbe; si l'on pose $t = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$, $t' = \operatorname{tang}\frac{\varphi'}{2}$, on pourra écrire $\varphi' = \varphi + \pi$. Si le point M décrit toute la courbe, le point M′ décrit aussi toute la courbe dans le même sens cette fois; les

deux points M et M′ restent à une distance constante, mesurée sur la courbe. La lemniscate déjà citée offre cette disposition dans la symétrie relative à Oy.

S'il s'agit de courbes unicursales sphériques, l'emploi des coordonnées α et β conduit naturellement dans le premier cas à supposer que zOx est le plan de symétrie : le paramètre ayant été choisi comme il a été dit, si l'on pose $t = \tan\frac{\varphi}{2}$, $q = e^{i\varphi}$, la relation involutive est $t + t' = 0$ ou $qq' = 1$; le point (α, β) a pour symétrique le point (β, α) et l'on a pour équations paramétriques de (M)

$$(1) \qquad \alpha = \frac{q^m + A_1 q^{m-1} + \ldots + A_m}{B q^m + B_1 q^{m-1} + \ldots + B_m}, \qquad \beta = \frac{1 + A_1 q + \ldots + A_m q^m}{B + B_1 q + \ldots + B_m q^m},$$

où les coefficients A et B sont réels; les points réels de la courbe s'obtiennent en donnant à q des valeurs imaginaires de module égal à 1; la projection de la courbe sur le plan zOx comprend d'abord la projection des points réels, puis une partie réelle *virtuelle* correspondant aux valeurs de q réelles, valeurs donnant pour c et c'' des valeurs réelles et pour c' une valeur imaginaire pure. Sous les seules hypothèses faites, les formules (1) comportent une rotation arbitraire autour de Oy et le changement de t en λt où λ est une constante réelle arbitraire. Dans le cas déjà rencontré où nous étudions une courbe (M) unicursale, admettant cette symétrie par rapport à zOx et n'ayant que deux points à l'infini, les deux arbitraires en question ont été déterminées en prenant le plan xOy pour plan des deux génératrices isotropes de C et faisant correspondre $t = i$ et $t = -i$ à ces deux génératrices.

Dans l'autre genre de symétrie, il est commode au contraire de prendre le plan de symétrie pour plan xOy; c'' changeant de signe, α est remplacé par $\frac{1}{\beta}$ et β par $\frac{1}{\alpha}$; en adjoignant encore q à t, la relation involutive est $1 + tt' = 0$ ou $q + q' = 0$; nous avons encore deux arbitraires : une relation autour de Oz et le remplacement de φ par $\varphi + \omega$, où ω est une constante arbitraire. Si l'on écrit

$$\alpha = \frac{q^m + A_1 q^{m-1} + \ldots + A_m}{B q^m + B_1 q^{m-1} + \ldots + B_m}, \qquad \beta = \frac{1 + A'_1 q + \ldots + A'_m q^m}{B' + B'_1 q + \ldots + B'_m q^m},$$

on a les relations nécessaires et suffisantes

$$\frac{1}{B'_m} = \frac{-A_1}{B_{m-1}} = \ldots = \frac{(-1)^m A_m}{B'} = \frac{B}{A'_m} = \ldots = \frac{(-1)^m B_m}{1},$$

d'où $(-1)^m B_m B'_m = 1$; cela entraîne que m soit pair, le degré de $(\mathcal{M})$ et C est multiple de 4. J'ai indiqué (Chap. III, § 6) l'utilité de la position *canonique* de C : cela fixe les deux arbitraires restant en jeu et permet de supposer A_m et B_m réelles, de sorte que B_m peut être pris égal à 1; en remplaçant m par $2m$, on a finalement

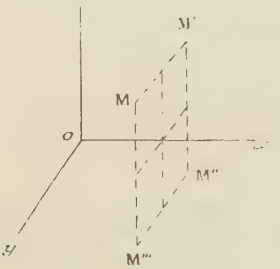
$$(2)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{q^{2m} + A_1 q^{2m-1} + A_2 q^{2m-2} + \ldots + A_{2m}}{1 - A'_1 q + A'_2 q^2 - \ldots + A_{2m} q^{2m}}, \\ \beta = \dfrac{1 + A'_1 q + A'_2 q^2 + \ldots + A_{2m} q^{2m}}{q^{2m} - A_1 q^{2m-1} + A_2 q^{2m-2} - \ldots + A_{2m}}. \end{cases}$$

J'emploierai souvent les expressions abrégées; symétrie zOx, t en $-t$ ou q en $\frac{1}{q}$ pour définir le premier genre de symétrie; pour le second, symétrie xOy, q en $-q$.

J'avais déjà eu l'occasion de faire allusion à ces deux modes de symétrie (Chap. II, § 9; Chap. III, § 7 et 15).

2. Il est intéressant de voir dans quel cas une courbe unicursale quelconque peut admettre deux plans de symétrie rectangulaires.

Fig. 7.



Supposons-les pris pour plans des xz et des xy; les points de la courbe sont donc associés par 4, M, M', M'', M''' comme sur la figure; la relation entre le t de M et le t' de M' est supposée ramenée à l'une

des formes $t + t' = 0$ ou $tt' + 1 = 0$. Prenons le premier cas; t''' paramètre de M''' est lié à t par une relation $At t''' + B(t + t''') + C = 0$, relation qui subsiste encore si l'on remplace le couple MM''' par le couple M'M'', de sorte que cette relation est simplement $tt''' = K$, où K est une constante; en changeant t en λt, on peut supposer K égal à $+1$ ou à -1. On a donc à choisir entre

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{M}, & \mathrm{M}', & \mathrm{M}'', & \mathrm{M}''' \\ t, & -t, & \frac{1}{t}, & \frac{-1}{t} \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{cccc} \mathrm{M}, & \mathrm{M}', & \mathrm{M}'', & \mathrm{M}''' \\ t, & -t, & \frac{-1}{t}, & \frac{1}{t}. \end{array}$$

Si, au contraire, la symétrie xOz est caratérisée par $1 + tt' = 0$, on voit aisément qu'il suffit de permuter le rôle de xOy et xOz dans la première hypothèse que nous venons d'obtenir. On n'a donc que deux espèces de disposition : dans la première, les deux symétries planes sont du type opposé (lemniscate); dans la seconde, elles sont toutes deux du type à éléments doubles de l'involution réels (ellipse).

. Le premier type, pour les courbes sphériques unicursales, donne manifestement les formules

$$(3) \qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{q^{2m} + A_1 q^{2m-1} + A_2 q^{2m-2} + \ldots + A_{2m}}{1 - A_1 q + A_2 q^2 - \ldots + A_{2m} q^{2m}}, \\ \beta = \dfrac{1 + A_1 q + A_2 q^2 + \ldots + A_{2m} q^{2m}}{q^{2m} - A_1 q^{2m-1} + A_2 q^{2m-2} + \ldots + A_{2m}}, \end{cases}$$

condensation des formules (1) et (2).

Dans le second type, il sera commode au contraire de prendre xOz et yOz pour plans de symétrie; M et M'' correspondent aux valeurs q et $-q$; il suffira donc de supposer qu'on écrit les formules (1) en prenant le numérateur pair, le dénominateur impair par rapport à q ou le numérateur impair et le dénominateur pair.

Le même mode de raisonnement prouve aisément qu'une courbe unicursale *gauche* ne peut avoir trois plans de symétrie deux à deux rectangulaires. Pour une courbe plane unicursale, les trois plans peuvent exister (ellipse, lemniscate), mais l'un de ces plans est précisément le plan de la courbe. Il existe une infinité de courbes algébriques gauches ayant trois plans de symétrie deux à deux rectangulaires : elles ne sont donc pas unicursales.

Une courbe unicursale ou algébrique ne peut avoir deux plans de symétrie parallèles, mais elle peut avoir deux plans de symétrie sécants, faisant entre eux un angle commensurable avec π ; l'intersection des deux plans est alors un axe de rotation de la courbe ; ceci sera étudié plus loin.

3. Nous devons maintenant étudier le cas où la courbe ($\mathfrak{w}$) admet un axe de symétrie Δ, que nous prenons pour axe des z.

Un point M et son symétrique M′ ont leurs paramètres liés par une involution que l'on peut ramener soit à la forme $t + t' = 0$ ou $tt' + 1 = 0$. Ceci entraîne des conséquences analogues à celles indiquées pour la symétrie plane relativement au sens de circulation de M et M′ sur la courbe. Dans le premier cas, les équations paramétriques de ($\mathfrak{w}$) seront

$$(4) \qquad \alpha = \left(q - \frac{1}{q}\right) f\left(q + \frac{1}{q}\right), \qquad \beta = \left(\frac{1}{q} - q\right) f_0\left(q + \frac{1}{q}\right),$$

où f et f_0 sont deux fractions rationnelles conjuguées. Le second cas donne

$$(5) \qquad \alpha = q\, f(q^2), \qquad \beta = \frac{1}{q} f_0\left(\frac{1}{q^2}\right),$$

où f et f_0 sont encore deux fractions rationnelles conjuguées.

Il peut d'ailleurs être aussi commode de prendre Δ comme axe des x ou bien si l'involution est à éléments doubles réels de la réduire à la forme $tt' = 1$ au lieu de $t + t' = 0$.

4. Supposons maintenant que le cône C se reproduise par une rotation d'amplitude V autour d'une droite que je prends pour Oz, l'angle V est nécessairement commensurable avec π si le cône C est algébrique. Le cas $V = \pi$ vient d'être étudié ; inutile d'y revenir. Si l'intersection de C avec la sphère ne se décompose pas, rien de plus à dire. Mais si elle se décompose en deux courbes ($\mathfrak{w}$) et ($\mathfrak{w}'$), comme précédemment la rotation V superpose ($\mathfrak{w}$) soit avec elle-même, soit avec ($\mathfrak{w}'$) ; dans ce dernier cas, une nouvelle rotation V ramènerait ($\mathfrak{w}$) sur elle-même par une rotation totale égale à 2V.

Je me borne donc à étudier le cas où une courbe gauche unicursale

se reproduit par une rotation d'amplitude V autour de Oz; le point M de paramètre t vient se superposer à un point M′ de paramètre t' et l'on a manifestement une relation homographique $Att' + Bt + Ct' + D = 0$ entre t et t'; les points doubles de cette homographie sont nécessairement imaginaires si la courbe est réelle et si l'angle V n'est pas égal à π; nous supposerons donc qu'ils correspondent à $t = +i$ où $-i$; la relation sera donc $\frac{t - t'}{1 + tt'} = K$, où K est une constante; en posant toujours $t = \tan\frac{\varphi}{2}$, $q = e^{i\varphi}$, on a $\varphi' - \varphi = V$, $\frac{q'}{q} = e^{iV}$; du point M on déduit donc tous les points de la suite

$$q, \quad qe^{iV}, \quad qe^{2iV}, \quad \ldots;$$

on devra donc avoir, si m est le nombre de termes distincts, $V = 2\pi\frac{k}{m}$, où k est un entier premier avec m. Je pourrai donc ranger autrement les valeurs de q, à savoir :

$$q, \quad qe^{\frac{2i\pi}{m}}, \quad qe^{\frac{4i\pi}{m}}, \quad \ldots, \quad qe^{\frac{2(m-1)i\pi}{m}},$$

la rotation faisant passer du point q au point $qe^{\frac{2i\pi}{m}}$ sera égale à $2\pi\frac{p}{m}$, où p est un entier premier avec m. Cette rotation multiplie α par $e^{\frac{2pi\pi}{m}}$, donc $\frac{\alpha}{q^p}$ reste invariant par le changement de q en $qe^{\frac{2i\pi}{m}}$ et je peux donc écrire

$$\alpha = q^p f(q^m), \qquad \beta = \frac{1}{q^p} f_0\left(\frac{1}{q^m}\right), \tag{6}$$

où f et f_0 sont deux fractions conjuguées; la réciproque est immédiate.

Nous avons déjà rencontré des exemples de cônes à rotation au Chapitre III, § 7, en particulier. A ce paragraphe, j'ai même signalé le cas où $(\mathfrak{M})$ s'applique sur $(\mathfrak{M}')$. On vérifiera sans peine que ce cas correspond aux formules

$$\begin{cases} \alpha = q^p \dfrac{q^{(2h-1)m} + A_1 q^{(2h-2)m} + A_2 q^{(2h-3)m} + \ldots + A_{2h-1}}{1 - A_1' q^m + A_2' q^{2m} + \ldots - A_{2h-1} q^{(2h-1)m}}, \\ \beta = \dfrac{1}{q^p} \dfrac{1 + A_1' q^m + A_2' q^{2m} + \ldots}{q^{(2h-1)m} - A_1 q^{(2h-2)m} + \ldots}. \end{cases} \tag{7}$$

où p est un entier impair; la rotation $\frac{\pi}{m}$ fait coïncider $(\mathfrak{M})$ avec $(\mathfrak{M}')$.

5. Il ne me reste plus qu'à signaler comment on reconnaîtra si une courbe unicursale tracée sur la sphère admet le centre de la sphère pour plan de symétrie, autrement dit est l'une de ces directrices que j'ai appelées *mixtes*. J'ai, au Chapitre II, § 11, indiqué le choix du paramètre; en posant $t = \tan\frac{\varphi}{2}$, $q = e^{i\varphi}$, φ augmentant de π ou q étant remplacé par $-q$, α est remplacé par $\frac{-1}{\beta}$ et β par $\frac{-1}{\alpha}$. On arrive aisément aux formules

$$(8)\qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{q^{2m+1} + A_1 q^{2m} + \ldots + A_{2m+1}}{1 - A'_1 q \quad + \ldots - A'_{2m+1} q^{2m+1}} e^{i\omega}, \\ \beta = \dfrac{1 + A'_1 q \quad + \ldots + A'_{2m+1} q^{2m+1}}{q^{2m+1} - A_1 q^{2m} + \ldots - A_{2m+1}} e^{-i\omega}. \end{cases}$$

Ces formules sont tout à fait analogues à celles relatives à la symétrie xOy, q en $-q$; le mode de formation des fractions α et β est le même dans les deux cas avec cette différence que dans l'un des cas les fractions sont de degré pair, dans l'autre de degré impair. Dans les formules (8), si l'on prend la position canonique autour de Oz, on pourra supposer ω nul et A_{2m+1} réelle.

6. Tout ce qui précède dans ce Chapitre s'applique à toutes les courbes algébriques ou unicursales sphériques, sans que nous devions nous préoccuper de savoir si la courbe correspondante $(\mathfrak{A})$ est ou non algébrique. Il est utile de signaler une autre proposition importante concernant les cônes réels unicursaux dont la directrice sphérique est unicursale ou mixte, que la courbe $(\mathfrak{A})$ d'ailleurs soit algébrique ou non. Je me borne d'abord au cas où la directrice $(\mathfrak{B})$ est effectivement unicursale et non mixte. Nous savons que si l'on se donne le degré nécessairement pair $2m$ du cône C à directrice sphérique unicursale proprement dite, et les indices $2i_1, 2i_2, \ldots, 2i_p$ des divers couples isotropes, on a d'abord $m = i_1 + i_2 + \ldots + i_p$, et les équations paramétriques de la directrice $(\mathfrak{B})$ sont de la forme

$$(9)\qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{A q^m + A_1 q^{m-1} + \ldots + A_m}{B q^m + B_1 q^{m-1} + \ldots + B_m}, \\ \beta = \dfrac{A' + A'_1 q + \ldots + A'_m q^m}{B' + B'_1 q + \ldots + B'_m q^m}, \end{cases}$$

les coefficients A, A′; A_1, A_1'; ...; B, B′; ...; B_m, B_m' sont répartis par groupes de deux imaginaires conjuguées et doivent satisfaire à une identité

$$(10)\quad (Aq^m+\ldots+A_m)(A'+\ldots+A_m'q^m)+(Bq^m+\ldots+B_m)(B'+\ldots+B_m'q^m)\equiv K(q+k_1)^{i_1}(k_1'q+1)^{i_1}(q+k_2)^{i_2}(k_2'q+1)^{i_2}\ldots,$$

où K est une constante réelle et k_1, k_1'; k_2, k_2'; k_p, k_p', p nouveaux couples d'imaginaires conjuguées.

Le résultat intéressant annoncé est le suivant : Quand on a fixé les indices $i_1, i_2, \ldots, i_p$ (ce qui donne m), on peut exprimer rationnellement toutes les inconnues A, A′; ...; A_m, A_m'; B, B′; ...; B_m, B_m' au moyen d'un certain nombre d'arbitraires indépendantes; et si ces arbitraires sont réelles, le cône C est réel.

La démonstration montrera même, mais c'est moins important, que K; k_1, k_1'; ...; k_p, k_p' seront, elles aussi, exprimées rationnellement au moyen de ces arbitraires.

Cette proposition est importante, car la méthode suivie pour arriver aux courbes (algébriques) algébriques réelles se divise en deux parties successives : premièrement, déterminer un cône C algébrique connaissant les indices de ses divers couples de génératrices isotropes conjuguées; deuxièmement, choisir parmi les cônes ainsi obtenus ceux qui donnent effectivement une courbe algébrique. Le problème préliminaire se trouve résolu si le cône C est non seulement algébrique, mais unicursal et si le nombre de couples d'indice impair est égal à 1 ou 0.

La démonstration est intuitive : supposons, en effet, les nombres $i_1, i_2, \ldots, i_p$ fixés numériquement et le résultat acquis, soit si p a reçu une valeur inférieure, soit si p ayant la même valeur, l'un au moins des nombres $i_1, i_2, \ldots, i_p$ a une valeur inférieure.

Je porte mon attention sur le couple $G_1 G_1'$ d'indice $2i_1$; je prends pour plan xOy le plan OG_1G_1', je suppose que G_1 et G_1' correspondent respectivement à $q=0$ et $q=\infty$; choisissant arbitrairement un entier $r\leq i_1$, je dois écrire pour (C) les équations paramétriques

$$(11)\quad \alpha = q^r\frac{Aq^h+A_1q^{h-1}+\ldots+A_h}{Bq^h+B_1q^{h-1}+\ldots+B_h},\qquad \beta=\frac{1}{q^r}\frac{A'+A_1'q+\ldots+A_h'q^h}{B'+B'q+\ldots+B_hq^h},$$

où je suppose A et B_h différentes de zéro, $h+r=m$; des deux quan-

tités A_h et B une au moins est différente de zéro. Il suffira donc de connaître les formules (11) et d'imprimer à C le mouvement le plus général autour de l'origine.

Or, pour connaître les formules (11), il suffit manifestement de connaître la courbe $(\mathfrak{W}_1)$ correspondant aux formules (11) recopiées purement et simplement après suppression du facteur q^r ou $\frac{1}{q^r}$; soit

$$(12)\qquad \alpha=\frac{Aq^h+A_1q^{h-1}+\ldots+A_h}{Bq^h+B_1q^{h-1}+\ldots+B_h},\qquad \beta=\frac{A'+A'_1q+\ldots+A'_hq^h}{B'+B'_1q+\ldots+B'_hq^h}.$$

Le cône C de directrice $(\mathfrak{W})$, formules (11), ou le cône C_1 de directrice $(\mathfrak{W}_1)$, formules (12), ont l'un et l'autre leurs génératrices isotropes définies par l'équation

$$(13)\qquad \begin{aligned}&(Aq^h+A_1q^{h-1}+\ldots+A_h)(A'+A'_1q+\ldots+A'_hq^h)\\&+(Bq^h+\ldots\ldots\ldots+B_h)(B'+B'_1q+\ldots+B'_hq^h)=0\end{aligned}$$

Un couple tel que $G_2G'_2$ de C, distinct de $G_1G'_1$, correspond à deux racines d'ordre de multiplicité i_2 de (13) et ces mêmes valeurs de q donnent sur C_1 un couple isotrope, d'indice $2i_2$ aussi, ayant une autre position dans l'espace. Quant au couple $G_1G'_1$, si $r=i_1$, l'équation (13) n'admet plus la racine $q=0$, le couple $G_1G'_1$ n'a pas d'équivalent sur le cône C_1 qui a donc seulement $p-1$ couples isotropes d'indice $i_2, \ldots, i_p$. Au contraire, si $r<i_1$, l'équation (13) admet la racine $q=0$ au degré i_1-r, le cône C_1 admet pour $q=0$ et $q=\infty$ un couple isotrope d'indice $2(i_1-r)$ seulement correspondant à $G_1G'_1$, donc le cône C_1 a p couples isotropes comme C, $p-1$ couples ayant même indice sur C ou C_1; mais un autre a un indice plus faible. Donc la proposition est établie si l'on sait la démontrer pour C_1, que r soit égal à i_1 ou inférieur à i_1.

On peut non seulement se donner $i_1, i_2, \ldots, i_p$, mais décomposer chacun des nombres $i_1, \ldots, i_p$ en une somme d'entiers positifs choisis arbitrairement. Autrement dit, soient $r, r', \ldots, r^{(n-1)}$ des entiers positifs choisis arbitrairement, mais de somme i_1; si le nombre n est égal à l'unité, le cône C sera à déduire du cône C_1 à $p-1$ couples; si $n-1$ n'est pas nul, nous avons une série de cônes $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$ dont le dernier est à $p-1$ couples; tandis que $C_{n-1}, C_{n-2}, \ldots, C_1$, C possèdent en plus de ces $p-1$ couples un couple

supplémentaire dont l'indice va en croissant en passant de C_{n-1} à C_{n-2}, puis C_{n-3}, ..., et enfin C_1 et C.

Cela posé, supposons obtenues par un moyen quelconque les équations paramétriques $\alpha = f(Q)$, $\beta = f_0\left(\frac{1}{Q}\right)$ de la directrice sphérique d'un cône unicursal à $p-1$ couples isotropes d'indice pair, cône supposé mis dans une position quelconque autour de son sommet, f et f_0 désignant deux fractions conjuguées; pour laisser subsister ces $p-1$ couples avec leur indice et ajouter un couple complémentaire, je remarque que k et k' désignant deux imaginaires conjuguées, si Q a une valeur de module unité, l'expression $\frac{Q-k}{\frac{1}{Q}-k'}$ est le quotient de deux imaginaires conjuguées et a pour module l'unité; il en sera donc de même du produit de cette fraction par $\frac{1}{Q}$; $\frac{Q-k}{1-Qk'}$ a pour module l'unité, si Q a pour module 1; si l'on effectuait la substitution homographique $q = \frac{Q-k}{1-Qk'}$, à $Q = k$ correspondrait $q = 0$, à $Q = \frac{1}{k'}$ correspondrait $q = \infty$, de sorte que, d'après ce qui précède, les équations

$$\alpha = \left(\frac{Q-k}{1-Qk'}\right)^r f(Q), \qquad \beta = \left(\frac{1-Qk'}{Q-k}\right)^r f_0\left(\frac{1}{Q}\right)$$

représentent la directrice sphérique d'un nouveau cône unicursal ayant d'abord $p-1$ couples isotropes de même indice que le précédent, plus un nouveau, pour $Q = k$ ou $\frac{1}{k'}$, d'indice $2r$; si nous imprimons le déplacement le plus général à ce cône autour de son sommet, cela reviendra à écrire $\alpha = f_1(Q)$, $\beta = f_{1,0}\left(\frac{1}{Q}\right)$, où l'on a

$$(14)\qquad \begin{cases} f_1(Q) = \dfrac{\lambda\left(\dfrac{Q-k}{1-Qk'}\right)^r f(Q) + \mu}{-\mu_0\left(\dfrac{Q-k}{1-Qk'}\right)^r f(Q) + \lambda_0}, \\ f_{1,0}\left(\dfrac{1}{Q}\right) = \dfrac{\lambda_0\left(\dfrac{1-Qk'}{Q-k}\right)^r f_0\left(\dfrac{1}{Q}\right) + \mu_0}{-\mu\left(\dfrac{1-Qk'}{Q-k}\right)^r f_0\left(\dfrac{1}{Q}\right) + \lambda}. \end{cases}$$

Si je veux laisser au couple $\left(k, \frac{1}{k'}\right)$ l'indice $2r$, j'en reste là; si je

veux lui donner l'indice $2r+2r_1$, je n'ai qu'à écrire $\alpha = f_2(Q)$, $\beta = f_{2,0}\left(\frac{1}{Q}\right)$, avec

$$(15)\quad \begin{cases} f_2(Q) = \dfrac{\lambda_1\left(\dfrac{Q-k}{1-Qk'}\right)^{r_1} f_1(Q) + \mu_1}{-\mu_{1,0}\left(\dfrac{Q-k}{1-Qk'}\right)^{r_1} f_1(Q) + \lambda_{1,0}}, \\ f_{2,0}\left(\dfrac{1}{Q}\right) = \dfrac{\lambda_{1,0}\left(\dfrac{1-Qk'}{Q-k}\right)^{r_1} f_{1,0}\left(\dfrac{1}{Q}\right) + \mu_{1,0}}{-\mu_1\left(\dfrac{1-Qk'}{Q-k}\right)^{r_1} f_{1,0}\left(\dfrac{1}{Q}\right) + \lambda_1}, \end{cases}$$

et ainsi de suite, f_1 et $f_{1,0}$, f_2 et $f_{2,0}$, ... désignant des fractions conjuguées; λ et λ_0, λ_1 et $\lambda_{1,0}$, ... désignant des couples de constantes conjuguées.

Tout revient donc à construire un cône unicursal n'ayant qu'un couple isotrope d'indice pair: or la méthode du début s'applique comme on le voit sans peine : le cône se ramène successivement à une suite de cônes n'ayant tous qu'un couple isotrope, diminuant d'indice à chaque fois, tout en changeant de position dans l'espace, obtenu toujours pour les mêmes valeurs du paramètre, que je peux supposer être $q=0$, $q=\infty$. Le dernier cône de la série se réduit nécessairement par un déplacement convenable à un cône $\alpha = Aq^p$, $\beta = \frac{A}{q^p}$, à représentation impropre, si $p>1$, cône de révolution autour de Oz, A étant une constante que je peux supposer réelle et j'effectue successivement les opérations analogues à celles de la suite (14), (15), ...

J'écris successivement, A et B étant réels,

$$(16)\quad \begin{cases} f(q) = \dfrac{q^p - AB}{Aq^p + B}, & f_0\left(\dfrac{1}{q}\right) = \dfrac{1 - ABq^p}{A + Bq^p}; \\ f_1(q) = \dfrac{\lambda q^{p_1} f(q) + \mu}{-\mu_0 q^{p_1} f(q) + \lambda_0}, & f_{1,0}\left(\dfrac{1}{q}\right) = \dfrac{\lambda_0 \dfrac{1}{q^{p_1}} f_0\left(\dfrac{1}{q}\right) + \mu_0}{-\mu \dfrac{1}{q^{p_1}} f_0\left(\dfrac{1}{q}\right) + \lambda}; \\ f_2(q) = \dfrac{\lambda_1 q^{p_2} f_1(q) + \mu_1}{-\mu_{1,0} q^{p_2} f_1(q) + \lambda_{1,0}}, & f_{2,0}\left(\dfrac{1}{q}\right) = \dfrac{\lambda_{1,0} \dfrac{1}{q^{p_2}} f_{1,0}\left(\dfrac{1}{q}\right) + \mu_{1,0}}{-\mu_1 \dfrac{1}{q^{p_2}} f_{1,0}\left(\dfrac{1}{q}\right) + \lambda_1}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

et dans la suite (16) les équations $\alpha = f_n(q)$, $\beta = f_{n,0}\left(\frac{1}{q}\right)$ définiront un cône unicursal ayant un seul couple isotrope d'indice

$$2p = 2p_1 + 2p_2 + \ldots + 2p_n;$$

on doit supposer $n \geq 1$ à moins qu'il ne s'agisse d'un cône de révolution. On transforme ensuite ce cône en cône à deux couples, puis trois couples, ...; les opérations successives n'introduisent que des calculs rationnels; les valeurs du paramètre correspondant aux divers couples sont mises en évidence et rentrent précisément dans les constantes arbitraires.

Pour étendre cette proposition aux cônes à directrice mixte, écrivons les équations paramétriques générales d'une courbe sphérique mixte de degré $2(2m+1)$:

$$(17) \qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{q^{2m+1} + A_1 q^{2m} + A_2 q^{2m-1} + \ldots + A_{2m+1}}{1 - A'_1 q + A'_2 q^{2m-1} - \ldots - A'_{2m+1} q^{2m+1}}, \\ \beta = \dfrac{1 + A'_1 q + A'_2 q^2 + \ldots + A'_{2m+1} q^{2m+1}}{q^{2m+1} - A_1 q^{2m} + A_2 q^{2m-1} - \ldots - A_{2m+1}}. \end{cases}$$

L'équation aux génératrices isotropes du cône C est alors

$$(18) \quad (q^{2m+1} + A_2 q^{2m-1} + A_4 q^{2m-3} + \ldots + A_{2m} q)(1 + A'_2 q^2 + \ldots + A'_{2m} q^{2m}) + (A_1 q^{2m} + A_3 q^{2m-2} + \ldots + A_{2m+1})(A'_1 q + \ldots + A'_{2m-1} q^{2m-1}) = 0.$$

Le premier membre de (18) est un polynome entier impair en q, admettant la racine $q = 0$ à un ordre impair de multiplicité, indice du couple isotrope d'indice impair; les autres racines sont associées par groupe de 4, à savoir k_1, $-k_1$, $\frac{1}{k'_1}$, $\frac{-1}{k_1}$ qui donnent un couple d'indice pair égal au double de l'ordre de multiplicité de chacune de ces racines Supprimant le facteur q dans le premier membre de (18), nous aurons en posant $q^2 = x$ une identité

$$(19) \quad (x^m + A_2 x^{m-1} + A_4 x^{m-2} + \ldots + A_{2m})(1 + A'_2 x + \ldots + A'_{2m} x^m) + (A_1 x^m + A_3 x^{m-1} + \ldots + A_{2m+1})(A'_1 + \ldots + A'_{2m+1} x^m) \equiv K x^i (x - k_1^2)^{i_1} (k'^2_1 x - 1)^{i'_1} (x - k_2^2)^{i_2} (k'^2_2 x - 1)^{i_2} \ldots.$$

Si donc on a fixé l'indice $2i+1$ du couple d'indice impair, les indices $2i_1, 2i_2, \ldots, 2i_p$ des autres couples, l'identité (19) ne diffère que par

les rotations de l'identité (10) et le résultat est que nous savons exprimer rationnellement au moyen d'arbitraires les quantités A_2, A_4, ..., A_{2m}, A'_2, ..., A'_{2m}, et A_1, A_3, ..., A_{2m+1}, A'_1, ..., A'_{2m+1}, ainsi que K, k_1^2, k_2^2, ..., k_p^2, $k_1'^2$, ...

On passe par l'intermédiaire de la courbe sphérique unicursale auxiliaire

$$(20)\qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{q^m + A_2 q^{m-1} + A_4 q^{m-2} + \ldots + A_{2m}}{A_1 q^m + A_3 q^{m-1} + \ldots + A_{2m+1}}, \\ \beta = \dfrac{1 + A'_2 q + \ldots + A_{2m} q^m}{A'_1 + A'_3 q + \ldots + A'_{2m+1} q^m}, \end{cases}$$

qui sert de base à un cône unicursal admettant le couple $q = 0$, $q = \infty$ d'indice $2i$, le couple k_2^2, $\frac{-1}{k_1'^2}$ d'indice $2i_1$, ..., etc.

Dans cette proposition ainsi établie, il faut se rappeler que je n'ai fixé aucune autre indication *a priori* que les valeurs des indices des divers couples; toute autre condition donnée à l'avance, relativement, par exemple, au degré ou à la classe des cycles, diminuerait le nombre des arbitraires, mais il ne serait, en général, plus vrai que les coefficients inconnus s'expriment rationnellement au moyen d'un certain nombre d'arbitraires. Cela se conçoit aisément, car en nous bornant aux conditions de l'énoncé primitif, nous avons tous les coefficients inconnus exprimés rationnellement au moyen d'arbitraires λ_1, λ_2, ..., λ_s; les relations nouvelles se traduisent par des relations $f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s) = 0$ dont nous ne pouvons rien dire.

Il est bon de signaler que si l'on impose au cône C d'admettre un axe de rotation, la propriété subsiste : car, en prenant Oz pour axe, les équations $\alpha = q^p f(q^m)$, $\beta = \frac{1}{q^p} f_0\left(\frac{1}{q^m}\right)$ conduisent à considérer la courbe $\alpha = f(x)$, $\beta = f_0\left(\frac{1}{x}\right)$ que l'on déterminera par la méthode indiquée ici.

De même, si l'on suppose que le cône C et la courbe (Γ) admettent le plan Oz pour plan de symétrie, q en $\frac{1}{q}$, le résultat subsistera pourvu que les points d'intersection de (Γ) avec le cercle de l'infini se répartissent en couples de deux points à la fois conjugués et symétriques par rapport à xOz, car alors il suffira, dans les diverses formules (11),

(15) ou (16), de supposer les fonctions f ou f_0 réelles, les quantités λ, μ, λ_1, ... toutes réelles, ainsi que k, k_1, ...

Nous allons voir que, dans le cas de la symétrie q en $-q$, le résultat subsiste complètement; supposons que le plan de symétrie soit xOy, les équations de la directrice (15) sont réductibles à l'une ou l'autre forme :

$$(21)\qquad \begin{cases} \alpha = q^{2p+1}\dfrac{q^{2m+1}+A_1q^{2m}+A_2q^{2m-1}+\ldots+A_{2m+1}}{1-A'_1q\quad+A'_2q^2\quad-\ldots-A'_{2m+1}q^{2m+1}}, \\ \beta = \dfrac{1}{q^{2p+1}}\dfrac{1+A'_1q\quad+A'_2q^2\quad+\ldots+A'_{2m+1}q^{2m+1}}{q^{2m+1}-A_1q^{2m}+A_2q^{2m-1}-\ldots-A_{2m+1}}, \end{cases}$$

ou

$$(22)\qquad \begin{cases} \alpha = q^{2p}\quad\dfrac{q^{2m}+A_1q^{2m-1}+A_2q^{2m-2}+\ldots+A_{2m}}{1-A'_1q\quad+A'_2q^2\quad+\ldots+A'_{2m}q^{2m}}, \\ \beta = \dfrac{1}{q^{2p}}\quad\dfrac{1+A'_1q\quad+A'_2q^2\quad+\ldots+A'_{2m}q^{2m}}{q^{2m}-A_1q^{2m-1}+\ldots\ldots\ldots+A_{2m}}, \end{cases}$$

où p est un entier positif ou nul. Dans le premier cas, la méthode exposée conduit à déterminer la courbe auxiliaire

$$(21')\qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{q^{2m+1}+A_1q^{2m}+\ldots+A_{2m+1}}{1-A'q\quad+\ldots-A'_{2m+1}q^{2m+1}}, \\ \beta = \dfrac{1+A'_1q\quad+\ldots+A'_{2m+1}q^{2m+1}}{q^{2m+1}-A_1q^{2m}+\ldots-A_{2m+1}}, \end{cases}$$

correspondant à un cône à directrice mixte : problème qui a été résolu complètement.

Dans le second cas, la méthode conduit à étudier la courbe auxiliaire

$$(22')\qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{q^{2m}+A_1q^{2m-1}+\ldots+A_{2m}}{1-A'_1q\quad+\ldots+A_{2m}q^{2m}}, \\ \beta = \dfrac{1+A'_1q\quad+\ldots+A_{2m}q^{2m}}{q^{2m}-A_1q^{2m-1}+\ldots+A_{2m}}. \end{cases}$$

Cette courbe [identique à la courbe (22) si $p=0$] est la directrice d'un cône admettant aussi la symétrie xOy q en $-q$, admettant pour chaque couple isotrope du premier un couple isotrope de même indice, exception faite pour le couple $z=0$, $x+iy=0$ d'indice ip sur le premier, couple qui ne se retrouve plus sur le second. La considération des génératrices isotropes, soit du cône (22), soit du

cône (22′), conduit à l'identité

$$(23)\quad \begin{aligned}&(q^{2m}+A_2q^{2m-2}+\ldots+A_{2m})(1+A'_2q^2+\ldots+A'_{2m}q^{2m})\\&+(A_1q^{2m-2}+A_3q^{2m-4}+\ldots+A_{2m-1})(A'_1q^2+\ldots+A'_{2m+1}q^{2m})\\&\equiv K(q^2-k_1^2)^{i_1}(k_1'^2q^2-1)^{i_1}(q^2-k_2^2)^{i_2}(k_2'^2q^2-1)^{i_2}\ldots.\end{aligned}$$

En remplaçant q^2 par x, j'ai l'identité

$$(23')\quad \begin{aligned}&(x^m+A_2x^{m-1}+\ldots+A_{2m})(1+A'_2x+\ldots+A'_{2m}x^m)\\&+(A_1x^{m-1}+\ldots+A_{2m-1})(A'_1x+\ldots+A'_{2m-1}x^m)\\&\equiv K(x-k_1^2)^{i_1}(k_1'^2x-1)^{i_1}(x-k_2^2)^{i_2}(k_2'^2x-1)^{i_2}\ldots.\end{aligned}$$

Et il est alors naturel de considérer le cône auxiliaire de directrice sphérique

$$(24)\quad \begin{cases}\alpha=\dfrac{x^m+A_2x^{m-1}+\ldots+A_{2m}}{A_1x^{m-1}+\ldots+A_{2m-1}},\\ \beta=\dfrac{1+A'_2x+\ldots+A'_{2m}x^m}{A'_1x+\ldots+A'_{2m-1}x^m},\end{cases}$$

qui, en vertu de l'identité (23′), admet un couple $\left(x=k_1^2 \text{ ou } \frac{1}{k_1'^2}\right)$ d'indice $2i_1$, un couple $\left(k_2^2, \frac{1}{k_2'^2}\right)$ d'indice $2i_2$, ... : la seule différence qu'il y ait avec le cas général, correspondant à l'identité (10), est que l'on a spécifié qu'au dénominateur de α le terme en x^m a son coefficient nul. Or cette condition est facile à exprimer : le cône (24) dérive par la méthode indiquée d'un cône antérieur

$$\alpha=\frac{ax^h+a_1x^{h-1}+\ldots+a_h}{bx^h+b_1x^{h-1}+\ldots+b_h},\qquad \beta=\frac{a'+a'_1x+\ldots+a'_h}{b'+b_1x+\ldots+b'_h}$$

par les formules (14), à savoir

$$\alpha=\frac{\lambda(x-k_1)^r(ax^h+\ldots+a_h)+\mu(1-k_1'x)^r(bx^h+\ldots+b_h)}{-\mu_0(x-k_1)^r(ax^h+\ldots+b_h)+\lambda_0(1-k_1'x)^r(bx^h+\ldots+b_h)};$$

il suffit donc d'écrire $\mu_0 a-(-1)^r\lambda_0k_1'^r b=0$ pour avoir une condition donnant rationnellement μ_0 en fonction de λ_0 et μ en fonction de λ, de sorte que, finalement, la méthode générale s'est appliquée jusqu'au bout; dans la dernière transformation successive de cônes, au lieu que λ, λ_0, μ, μ_0 soient arbitraires, il n'y a que λ et λ_0 qui le soient; tous les coefficients ont encore été exprimés rationnellement au

moyen d'arbitraires, entre lesquelles il ne reste aucune relation à écrire.

7. Nous avons maintenant à notre disposition tous les éléments nécessaires pour aborder la recherche générale des courbes (S) unicursales ou algébriques, en dénombrant les inconnues, ainsi que le nombre de conditions auxquelles satisfont ces inconnues.

J'insiste d'abord sur ce fait classique qu'une simple énumération d'inconnues et d'équations est tout à fait insuffisante. Il ne suffit pas de constater qu'un problème de géométrie sera résolu si l'on *sait* (ou du moins si l'on *peut*) trouver $m+p$ quantités satisfaisant à m relations pour affirmer qu'il y a des solutions (réelles ou imaginaires) et que la solution la plus générale dépend de p paramètres arbitraires. Pour bien nous rendre compte de cette proposition, supposons que, suivant l'habitude, toutes les équations écrites aient zéro pour second membre : si m individus isolés écrivent chacun au hasard une fonction algébrique de $m+p$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{m+p}$, le système obtenu en égalant à zéro chacune de ces fonctions sera compatible et aura effectivement sa solution générale dépendant de p arbitraires, parce que les m premiers membres sont indépendants; mais, si l'on considère le problème de géométrie que j'ai imaginé, se traduisant par un système de m équations à $m+p$ variables, si arbitraire qu'ait pu être l'énoncé, rien ne prouve que les m premiers membres doivent être indépendants. Nous devons nous livrer à une discussion préalable, souvent trop négligée dans la pratique, qui nous conduira à l'une des trois hypothèses suivantes :

1° Le système est effectivement formé d'équations indépendantes; la solution générale dépend de p paramètres;

2° Les premiers membres ne sont pas indépendants et le système est incompatible;

3° Les premiers membres ne sont pas indépendants et le système se réduit à m' équations distinctes ($m' < m$), les $m - m'$ autres étant de pures conséquences des premières; le système est compatible et sa solution générale dépend de $p + m - m'$ paramètres arbitraires.

Nous avons rencontré des exemples nombreux de problèmes

rentrant dans le second type ; il suffit que l'un des cycles isotropes soit de degré d et de classe $2d$, ou encore que l'un des cycles isotropes soit de degré et classe égaux à d et d'indice $3d$. Dans la thèse de M. Lyon, la plupart des cas amorcés rentrent précisément dans ces cas d'impossibilité.

La discussion préalable en question est négligée précisément en raison de sa difficulté dans la plupart des cas. Mais un moyen simple de la tourner s'offre naturellement quand nous pouvons, par un procédé quelconque, mettre la main sur une solution particulière, avec ou sans paramètres, car alors on est nécessairement dans la première ou troisième hypothèse. J'ai donné un exemple très simple de ce procédé lorsque je me suis proposé de trouver une courbe unicursale ($\mathfrak{d}$) pour laquelle le cône directeur des binormales est de degré 8 avec un premier couple isotrope d'indice 6 et un second d'indice 2 (Chap. III, § 17).

Ce qui précède ne fait pas intervenir la notion de réalité ou non-réalité. Supposons d'une façon plus précise qu'il s'agisse d'éléments géométriques réels, que les inconnues soient des quantités géométriques ou numériques réelles satisfaisant à un système d'équations à coefficients réels. Il faudra, en général, se résigner à vérifier si les équations sont effectivement indépendantes; supposons donc cette discussion faite, le système a été réduit à m équations

$$(25)\qquad \begin{cases} X_1(x_1, x_2, \ldots, x_m; x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{m+p}) = 0; \\ X_2(x_1, \ldots\ldots, x_m; x_{m+1}, \ldots\ldots, x_{m+p}) = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ X_m(x_1, \ldots\ldots, x_m; x_{m+1}, \ldots\ldots, x_{m+p}) = 0 \end{cases}$$

distinctes; on essaiera de trouver une solution particulière (avec ou sans paramètres) $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0; x_{m+1}^0, \ldots, x_{m+p}^0$, réelle, et si le système (25′) obtenu en remplaçant $x_{m+1}, \ldots, x_{m+p}$ par $x_{m+1}^0, \ldots, x_{m+p}^0$ admet avec un ordre de multiplicité impair la solution $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0$, on pourra affirmer qu'il y a une infinité de solutions réelles pour lesquelles $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{m+p}$ restent voisines de $x_{m+1}^0, \ldots, x_{m+p}^0$: on pourra prendre précisément $x_{m+1}, \ldots, x_{m+p}$ pour paramètres indépendants et développer $x_1, \ldots, x_m$ en séries entières à coefficients réels procédant suivant les puissances entières (ou fractionnaires,

suivant le cas) de $x_{m+1} - x^0_{m+1}, \ldots, x_{m+p} - x^0_{m+p}$. C'est ce qui a été fait pour le cône du huitième degré rappelé plus haut.

8. Abordons, comme application, des problèmes généraux : supposons le cône C unicursal de degré $2m$ n'ayant qu'un couple isotrope d'indice $2m$, de degré et classe égaux à r et admettant la symétrie zOx q en $\frac{1}{q}$. On a, d'après ce qui a été expliqué au Chapitre II (§ 7) et au début de ce Chapitre, le droit d'écrire

$$(26)\qquad \begin{cases} \alpha = q^r \dfrac{q^h + A_1 q^{h-1} + \ldots + A_h}{B q^h + \ldots + B_h} \\ \beta = \dfrac{1}{q^r} \dfrac{1 + A_1 q + \ldots + A_h q^h}{B + B_1 q + \ldots + B_h q^h} \end{cases} \qquad (h + r = m),$$

où les A et B sont réels, en nombre $2h + 1$. L'identité

$$(27)\quad (q^h + A_1 q^{h-1} + \ldots + A_h)(1 + A_1 q + \ldots + A_h q^h) + (B q^h + \ldots + B_h)(B + B_1 q + \ldots + B_h q^h) \equiv (1 + A_1^2 + \ldots + B_h^2) q^h$$

exprime que le couple $q = 0$ et $q = \infty$ a pour indice $2(h + r)$; d'après ce qui a été expliqué au paragraphe 6, cette identité permet d'exprimer $A_1, \ldots, A_h, B, \ldots, B_h$ rationnellement au moyen d'arbitraires indépendantes; l'identité (27) donnant h relations entre les A et B, le nombre d'arbitraires indépendantes est $h + 1$.

Il ne reste plus qu'à écrire les deux conditions résiduelles fournies par $\int \frac{d\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2}$, $\int \frac{\beta\, d\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2}$; on a donc deux équations seulement entre $h + 1$ inconnues. Donc, il est permis d'espérer obtenir des solutions à $h - 1$ paramètres; nous connaissons un cas d'impossibilité : le degré et la classe étant égaux tous deux à r pour les deux cycles isotropes conjugués, si l'indice $2(h + r)$ est égal à $3r$, c'est-à-dire si $r = 2h$, on est dans un cas d'impossibilité. Nous avons vu un autre cas d'impossibilité, à savoir $h = 1$ et $r = 1$. [Je rappellerai pour mémoire que si $r = 2h + 1$, la fraction $\frac{\frac{d\alpha}{dq}}{(1 + \alpha\beta)}$ est un polynome entier en q, de sorte qu'il n'y a qu'une équation entre les $(h + 1)$ inconnues.]

Occupons-nous maintenant de la réalité : au Chapitre III (§ 9) nous

avons vu que, pour la réalité, il est nécessaire que r soit inférieur à h sans égalité (ce qui élimine alors les deux cas $r = 2h$ et $r = h = 1$. Nous avons fait la discussion en particulier pour $h = 2$, $r = 1$ (cônes du sixième degré à plan de symétrie) et reconnu que le nombre de paramètres arbitraires restant est bien égal au nombre prévu par le simple dénombrement, et qu'il y a des solutions réelles (avec un paramètre arbitraire).

Il serait sans doute assez pénible de reconnaître si, pour toutes les valeurs de h et de r, il y a des solutions (réelles ou imaginaires) ou s'il y a des solutions réelles pour h quelconque et $r < h$.

Il y a un moyen très simple de démontrer qu'il y a effectivement des solutions à h paramètres si $r \geq 2h + 1$, à $h - 1$ paramètres si $r < 2h$.

En effet, au Chapitre III (§ 7), nous avons mis en évidence une solution particulière obtenue en faisant

$$A_1 = B_2 = \ldots = A_{h-1} = B_1 = B_2 = \ldots = B_{h-1} = 0.$$

Cette solution renferme un paramètre arbitraire; donc si r est supérieur ou égal à $2h + 1$, la solution générale dépend bien de h arbitraires, mais donne toujours une courbe imaginaire; si $r < 2h$, on peut considérer comme très probable que les deux équations obtenues entre les $h + 1$ inconnues sont distinctes (car il en est bien ainsi pour $h = 2$, $r = 1$) et alors la solution générale dépendra de $h - 1$ arbitraires; en tous les cas, si les deux équations n'étaient pas distinctes, l'existence d'une solution particulière entraînerait simplement cette conséquence que ces deux équations se ramèneraient à une seule, et il y aurait h arbitraires au lieu de $h - 1$. Quant à la réalité, nous savons qu'il est nécessaire que r soit inférieur à h; si cela a lieu, la solution particulière à un paramètre rappelée à l'instant est réelle si le paramètre varie entre certaines limites; mais cela ne suffit pas pour affirmer que, parmi les solutions à $h - 1$ paramètres, il y en ait effectivement une infinité à $h - 1$ paramètres qui sont réelles. Pour bien comprendre ceci, imaginons un point x, y, z satisfaisant à une condition unique $f(x, y, z) = 0$; il y a deux paramètres arbitraires, le point décrit une surface S : si l'on sait trouver une infinité de solutions réelles à un paramètre pour x, y, z réparties sur une courbe Γ,

cela n'entraîne pas que la surface S soit réelle; si l'équation $f = 0$ est algébrique, on pourra l'affirmer par exemple si Γ est ligne simple ou multiple d'ordre impair sur la surface S. Ce sont des considérations analogues qui entrent en jeu ici.

Je ferai remarquer encore pour mémoire que si r n'est pas premier avec h, la solution particulière $\alpha = q^r \frac{q^h + A_h}{B q^h + B_h}$, $\beta = \frac{1}{q^r} \frac{1 + A_h q^h}{B + B_h q^h}$, ainsi mise en évidence, est mise sous forme paramétrique impropre; mais cela ne gêne nullement pour la démonstration.

Il y a un autre groupe de solutions particulières que nous aurions pu employer : supposons que h n'est pas premier, soit d un diviseur de h autre que 1, posons $h = h'd$. Les équations

$$(28) \qquad \begin{cases} \alpha = q^r \dfrac{q^{h'd} + a_1 q^{(h'-1)d} + a_2 q^{(h'-2)d} + \ldots + a_{h'}}{b q^{h'd} + b_1 q^{(h'-1)d} + b_2 q^{(h'-2)d} + \ldots + b_{h'}}, \\ \beta = \dfrac{1}{q^r} \dfrac{1 + a_1 q^d + \ldots + a_{h'} q^{h'd}}{b + b_1 q^d + \ldots + b_{h'} q^{h'd}} \end{cases}$$

donnent, nous allons le voir, des solutions à h' paramètres. Comme plus haut, si r et d ne sont pas premiers, la représentation (28) est impropre, mais cela laisse subsister le résultat.

9. Nous sommes conduits tout naturellement à étudier le cas où le cône C satisfait aux mêmes conditions que précédemment et où la courbe (w) admet Oz pour axe de rotation. J'écris, r et m étant premiers entre eux,

$$(29) \qquad \begin{cases} \alpha = q^r \dfrac{q^{hm} + A_1 q^{(h-1)m} + \ldots + A_h}{B q^{hm} + B_1 q^{(h-1)m} + \ldots + B_h}, \\ \beta = \dfrac{1}{q^r} \dfrac{1 + A_1 q^m + \ldots + A_h q^{hm}}{B + B_1 q^m + \ldots + B_h q^{hm}}, \end{cases}$$

où je garde les mêmes notations que dans le paragraphe précédent, afin que nous nous rendions compte de l'analogie des calculs. Le fait que le cône C ne contient que les deux génératrices isotropes $q = 0$, $q = \infty$, se traduit par l'identité

$$(30) \qquad \begin{aligned} &(x^h + A_1 x^{h-1} + \ldots + A_h)(1 + A_1 x + \ldots + A_h x^h) \\ &\quad + (B x^h + B_1 x^{h-1} + \ldots + B_h)(B + \ldots + A_h x^h) \\ &\equiv (1 + A_1^2 + \ldots + B_h^2) x^h. \end{aligned}$$

qui est exactement la même qu'au paragraphe précédent, de sorte que nous retrouvons les mêmes expressions paramétriques de $A_1, A_2, \ldots, A_h, B, B_1, \ldots, B_h$ au moyen de $h+1$ arbitraires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{h+1}$.

Cette fois, m étant supposé différent de 1, les deux intégrales $\int \frac{d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}$ et $\int \frac{d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}$ sont automatiquement algébriques. L'intégrale $\int \frac{\beta\, d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}$ donne une relation nécessaire et suffisante entre les λ. Formons cette relation. Je puis poser $q^m = x$, $\alpha = q^r \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, $\beta = \frac{1}{q^r}\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$, et j'ai

$$\int \frac{\beta\, d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2} = \int \frac{[rf\varphi + mx(\varphi f' - f\varphi')]f_1\varphi_1}{[1+A_1^2+\ldots+B_h^2]^2 q x^{2h}}\, dq. \tag{31}$$

Il suffit donc d'exprimer que le polynome en x de degré $\frac{1}{2}h$ $[rf\varphi + mx(\varphi f' - f\varphi')]f_1\varphi_1$ n'a pas de terme en x^{2h}; j'ai appelé f' la dérivée du polynome $f(x) \equiv x^h + A, x^{h-1} + \ldots + A_h, \ldots$. On peut remarquer que si m devenait égal à 1, q^m ou x coïnciderait avec q et, par suite, le calcul que nous faisons serait encore valable pour $m = 1$. Les calculs que nous avons faits jusqu'ici : réalisation de l'identité (30), condition fournie par l'intégrale (31), sont donc valables même pour $m = 1$; la différence est la suivante, suivant que m surpasse 1 ou égale 1 : si m surpasse 1, nous avons obtenu *toutes* les conditions ; si m est égal à 1, *nous n'en avons qu'une partie;* il faut adjoindre aux conditions déjà écrites, recopiées en y faisant $m = 1$, la relation fournie par $\int \frac{d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}$ (d'ailleurs si $r \geq 2h+1$, cette nouvelle intégrale ne donne pas de condition). La remarque que nous faisons ici sur les calculs analogues relatifs à un cône à rotation et à un cône sans rotation sera exploitée avec tous les détails nécessaires.

Cette digression faite, il est bien clair que la relation fournie par (31) est de la forme

$$\frac{r}{m} = F(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{h+1}). \tag{32}$$

Il est alors naturel de poser la question de la façon suivante : λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_{h+1}$ sont $h+1$ variables qui doivent être réelles pour que la courbe (29) soit réelle. Considérons-les comme les coordonnées d'un

point dans l'espace à $h+1$ dimensions ; cherchons entre quelles limites varie la fonction F quand le point $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{h+1})$ balaie cet espace tout entier : soient l la limite inférieure, L la limite supérieure de F ; quand $\frac{r}{m}$ aura une valeur rationnelle prise arbitrairement entre et L, l'équation (32) représentera une variété réelle à h dimensions dans cet espace à $h+1$ dimensions; donc, nous aurons des courbes (C) réelles algébriques pour toutes ces valeurs $\frac{r}{m}$, courbes à h paramètres. Autrement dit, la méthode revient, la valeur de h étant donnée, à considérer $\frac{r}{m}$ comme une nouvelle inconnue, qui ne prendra toutefois que des valeurs rationnelles.

Une digression en passant : j'ai supposé jusqu'ici r positif ; mais il est bien clair qu'il n'y a aucune raison, dans le calcul de l et L, à éliminer *a priori* les valeurs négatives de r ; en effet, dans (29), si r est négatif, rien d'essentiel n'est changé ; d'ailleurs, nous pouvons alors faire tourner C de 180° autour de Oy, ce qui se traduit indifféremment soit par la même rotation de (𝔖) autour de Oy, soit par l'échange de (𝔖) avec la symétrique de (𝔖) par rapport à zOx ; or cet échange revient à permuter α avec β : dans un tel échange, déjà signalé nombreuses fois, r change de signe en même temps que les coefficients $A_1, \ldots, A_h, B, \ldots, B_h$ sont remplacés respectivement par $\frac{A_{h-1}}{A_h}$, $\frac{A_{h-2}}{A_h}, \ldots$.

Il résulte de là que $l = -L$; bornons-nous donc à calculer L et à prendre r positif ; nous savons *a priori* que la réalité exige $r < hm$, donc $L \leq h$. D'autre part, il est évident, en raison de l'exemple du Chapitre III (§ 7), que $L = h$, en effet, nous savons que

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_{h-1} = 0, \qquad B_1 = B_2 = \ldots = B_{h-1} = 0, \qquad B_h = 1,$$

$$A_h = -B = \sqrt{\frac{hm+r}{hm-r}}$$

est une solution particulière, réelle si $\frac{r}{m} < h$: donc la proportion est bien établie.

10. La même méthode donnera les résultats suivants :

Cône unicursal n'ayant ni rotation, ni plan de symétrie, à deux génératrices isotropes :

$$33) \qquad \begin{cases} \alpha = q^r \dfrac{q^h + A_1 q^{h-1} + \ldots + A_h}{B q^h + B_1 q^{h-1} + \ldots + B_h}, \\ \beta = \dfrac{1}{q^r} \dfrac{1 + A'_1 q + A'_2 q^2 + \ldots + A_h q^{hr}}{B + B'_1 q + B'_2 q^2 + \ldots + B_h q^h}. \end{cases}$$

En tenant compte des résultats du Chapitre III (§ 6) et de ce Chapitre, les quantités $A_1, \ldots, B_h$ s'expriment rationnellement au moyen de $2h$ arbitraires si l'on se borne à exprimer qu'il n'y a qu'un couple isotrope; trois conditions résiduelles s'ajoutent, de sorte que la solution générale est à $2h - 3$ arbitraires (sauf cas d'exception $r = 2h$ et $r = h = 1$); la solution particulière du Chapitre III (§ 7), correspondant à

$$A_1 = A_{h-1} = A'_1 = \ldots = A'_{h-1} = 0,$$
$$B_1 = B_2 = \ldots = B_{h-1} = B'_1 = \ldots = B'_{h-1} = 0,$$

permet d'affirmer en toute rigueur cette existence. Enfin, pour la réalité, il est nécessaire que $r < h$ et il est *vraisemblable* qu'en général cette inégalité sera suffisante, car pour $h = 2$ il en est bien ainsi.

Soit maintenant le cône unicursal à deux génératrices isotropes, dépourvu de plan de symétrie, mais ayant un axe de rotation

$$(34) \qquad \begin{cases} \alpha = q^r \dfrac{q^{hm} + A_1 q^{(h-1)m} + \ldots + A_h}{B q^{hm} + B_1 q^{(h-1)m} + \ldots + B_h}, \\ \beta = \dfrac{1}{q^r} \dfrac{1 + A'_1 q^m + \ldots + A_h q^{hm}}{B + B'_1 q^m + \ldots + B_h q^{hm}}. \end{cases}$$

Comme pour (33) les A et B s'expriment rationnellement au moyen de $2h$ arbitraires; cette fois, il n'y a qu'une relation résiduelle provenant de $\int \frac{\beta\, d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}$; comme plus haut, pour la réalité, il est nécessaire et suffisant que $\frac{r}{m}$ soit inférieur à h : on a des courbes réelles à $2h - 1$ arbitraires.

Soit un cône unicursal à deux génératrices isotropes d'indice impair,

admettant le plan zOx pour plan de symétrie q en $\frac{1}{q}$:

$$(35)\qquad \begin{cases} \alpha = q^{2r}\,\dfrac{q^{2h+1} + A_1 q^{2h} + A_2 q^{2h-1} + \ldots + A_{2h+1}}{1 - A_1 q \quad + A_2 q^2 \quad + \ldots - A_{2h+1} q^{2h+1}}, \\ \beta = \dfrac{1}{q^{2r}}\,\dfrac{1 + A_1 q \quad + A_2 q^2 \quad + \ldots + A_{2h+1} q^{2h+1}}{q^{2h+1} - A_1 q^{2h} + A_2 q^{2h-1} + \ldots - A_{2h+1}}. \end{cases}$$

Nous avons vu que la condition que $q = 0$ et $q = \infty$ donnent le seul couple isotrope permet d'exprimer rationnellement $A_1 A_2 \ldots A_{2h+1}$ au moyen de $h+1$ arbitraires, lesquelles seront liées ensuite par deux conditions résiduelles. Pour les mêmes raisons, la solution générale, si $r > 2h+1$, dépend de h arbitraires, mais est imaginaire; pour $r = 2h+1$, il y a impossibilité; pour $r < 2h+1$, la solution générale dépend de $h-1$ arbitraires; pour avoir des solutions réelles, il est nécessaire que r soit inférieur ou égal à h et l'existence des solutions réelles est alors vraisemblable; tout cela a été vérifié pour $h = 1$, $r = 1$.

Prenons maintenant le cône unicursal à deux génératrices isotropes d'indice impair sans plan de symétrie :

$$(36)\qquad \begin{cases} \alpha = q^{2r}\,\dfrac{q^{2h+1} + A_1 q^{2h} + \ldots + A_{2h+1}}{1 - A'_1 q \quad + \ldots - A_{2h+1} q^{2h+1}}, \\ \beta = \dfrac{1}{q^{2r}}\,\dfrac{1 + A'_1 q \quad + \ldots + A_{2h+1} q^{2h+1}}{q^{2h+1} - A_1 q^{2h} + \ldots - A_{2h+1}}. \end{cases}$$

Comme précédemment, les lettres $A_1, A'_1, \ldots, A_{2h}, A'_{2h}, A_{2h+1}$ peuvent s'exprimer, avant toute condition résiduelle, rationnellement au moyen de $2h+1$ arbitraires; il y a trois conditions résiduelles (deux seulement si r surpasse $2h+1$); donc, si r surpasse $2h+1$, la solution générale existe et renferme $2h-1$ arbitraires; pour $r = 2h+1$, il y a impossibilité; pour $r < 2h+1$, il y a $2h-2$ arbitraires et l'on peut, si $r \geq h$, obtenir dans certains cas des solutions réelles : pour $r = h = 1$, on n'avait eu que des solutions imaginaires.

Nous pouvons considérer les cônes de même définition géométrique que précédemment, mais admettant en plus Oz comme axe de rotation,

m étant un entier impair, premier avec r :

$$(37)\qquad \begin{cases} \alpha = q^{2r}\,\dfrac{q^{(2h+1)m} + A_1 q^{2hm} + \ldots + A_{2h+1}}{1 - A_1 q^m + \ldots - A_{2h+1} q^{(2h+1)m}}, \\ \beta = \dfrac{1}{q^{2r}}\,\dfrac{1 + A_1 q^m + \ldots + A_{2h+1} q^{(2h+1)m}}{q^{(2h+1)m} - A_1 q^{2hm} + \ldots - A_{2h+1}}. \end{cases}$$

Si h et r ont les mêmes valeurs que dans (35), il y a un paramètre arbitraire de plus pour le cône (37) que le cône (35), mais cette fois la réalité est établie en toute rigueur pour $\frac{2r}{m} < 2h+1$. De même pour le cône

$$(38)\qquad \begin{cases} \alpha = q^{2r}\,\dfrac{q^{(2h+1)m} + A_1 q^{2hm} + \ldots + A_{2h+1}}{1 - A_1 q^m + \ldots - A_{2h+1} q^{(2h+1)m}}, \\ \beta = \dfrac{1}{q^{2r}}\,\dfrac{1 + A_1 q^m + \ldots + A_{2h+1} q^{(2h+1)m}}{q^{(2h+1)m} - A_1 q^{2hm} + \ldots - A_{2h+1}}, \end{cases}$$

il y a deux paramètres de plus que dans (36) et l'existence de solutions réelles est établie en toute rigueur pour $\frac{2r}{m} < 2h+1$.

Passons maintenant aux cônes unicursaux à deux génératrices isotropes d'indice pair tels que la courbe (M) admette le plan xOz pour plan de symétrie q en $\frac{1}{q}$ et le plan xOy comme plan de symétrie q en $-q$. La directrice (M) a pour équations

$$(39)\qquad \begin{cases} \alpha = q^{2r+1}\,\dfrac{q^{2h+1} + A_1 q^{2h} + \ldots + A_{2h+1}}{1 - A_1 q + \ldots - A_{2h+1} q^{2h+1}}, \\ \beta = \dfrac{1}{q^{2r+1}}\,\dfrac{1 + A_1 q + A_2 q^2 + \ldots + A_{2h+1} q^{2h+1}}{q^{2h+1} - A_1 q^{2h} + A_2 q^{2h-1} + \ldots - A_{2h+1}}. \end{cases}$$

Avant toute relation résiduelle, on peut exprimer les A au moyen de $h+1$ arbitraires et l'on a une seule relation résiduelle, car c, c' sont paires en q, c'' impaire; $\int c \frac{dc''}{dq}\,dq$, $\int c' \frac{dc''}{dq}\,dq$ sont automatiquement algébriques et l'intégrale $\int c\,dc'$ fournit seule une relation, relation que l'on peut former avec $\int \frac{\beta\,d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}$. Par le même raisonnement que pour les cônes à rotation, on montre que si $r < h$, on a une infinité de solutions réelles à h paramètres. Cela a été vérifié pour $h=1$, $r=0$.

Si l'on prend le cône unicursal à deux génératrices isotropes d'indice pair tel que la courbe (𝔐) admette la symétrie xOy q en $-q$, les équations de la directrice (𝔐) sont

$$(40)\qquad \begin{cases} \alpha = q^{2r+1}\,\dfrac{q^{2h+1}+A_1q^{2h}+\ldots+A_{2h+1}}{1-A'_1q\quad+\ldots-A_{2h+1}q^{2h+1}}, \\ \beta = \dfrac{1}{q^{2r+1}}\,\dfrac{1+A'_1q\quad+A'_2q^2+\ldots+A_{2h+1}q^{2h+1}}{q^{2h+1}-A_1q^{2h}+\ldots\ldots\ldots\ldots-A_{2h+1}}; \end{cases}$$

avant toute relation résiduelle, les A s'expriment au moyen de $2h+1$ arbitraires et il n'y a toujours qu'une relation résiduelle : il y a une infinité de solutions réelles à $2h$ paramètres, si $r<h$; nous l'avons vérifié pour $h=1$, $r=0$.

Enfin, si nous prenons les formules

$$(41)\qquad \begin{cases} \alpha = q^{2r+1}\,\dfrac{q^{(2h+1)m}+A_1q^{2hm}+\ldots+A_{2h+1}}{1-A_1q^m\quad+\ldots-A_{2h+1}q^{(2h+1)m}}, \\ \beta = \dfrac{1}{q^{2r+1}}\,\dfrac{1+A_1q^m\quad+\ldots+A_{2h+1}q^{(2h+1)m}}{q^{(2h+1)m}-A_1q^{2hm}+\ldots-A_{2h+1}}, \end{cases}$$

où m est premier avec $2r+1$, on ne gagne aucune simplification ni aucun paramètre par rapport au cône (39). Ici, le cône C admet l'axe Oz pour axe de rotation $\frac{\pi}{m}$, cette rotation de $\frac{\pi}{m}$ appliquant (𝔐) sur (𝔐'); si m est pair, (𝔐) admet Oz pour axe de symétrie q en $-q$; si m est impair, (𝔐) admet xOy pour plan de symétrie q en $-q$. La seule condition pour obtenir des courbes réelles est $2r+1<(2h+1)m$. Mêmes considérations pour les cônes

$$(42)\qquad \begin{cases} \alpha = q^{2r+1}\,\dfrac{q^{(2h+1)m}+A_1q^{2hm}+\ldots+A_{2h+1}}{1-A'_1q^m\quad+\ldots-A_{2h+1}q^{(2h+1)m}}, \\ \beta = \dfrac{1}{q^{2r+1}}\,\dfrac{1+A'_1q^m\quad+\ldots+A_{2h+1}q^{(2h+1)m}}{q^{(2h+1)m}-A_1q^{2hm}+\ldots-A_{2h+1}}, \end{cases}$$

comparés à (40). Le cône (42) possède les mêmes propriétés géométriques que le cône (41), sauf la symétrie zOx.

11. Le paragraphe précédent généralise tout ce qui était connu avant ce Mémoire sur les courbes algébriques réelles à torsion constante : les seuls exemples connus consistaient, en effet, en courbes

unicursales dont le cône directeur des binormales n'a que deux génératrices isotropes. J'ai réalisé, outre la généralisation de ces types, un autre progrès en donnant des types où le cône des binormales a quatre génératrices isotropes : Chapitre III (§ 14), cône réel (9) du sixième degré, et (§ 16) cône réel (ν) du huitième degré. Les calculs étaient assez pénibles pour le premier ; mais, pour le second, ils étaient inabordables de front ; j'ai pu les esquiver par l'application des méthodes générales exposées dans ce Chapitre. Si nous songeons aux propriétés des cônes à rotation, nous formons sans effort un type de degré aussi grand que l'on veut par des calculs analogues à ceux du cône réel (9) du sixième degré, mais plus simples. Cette extension n'est qu'un cas particulier d'une méthode générale qui sera exposée plus bas. J'écris, en supposant r et m premiers entre eux et $m > 1$,

$$(42)\qquad \begin{cases} \alpha = q^r \dfrac{(q^m + k)^2}{(kq^m + 1)(Aq^{2m} + Bq^m + C)}, \\ \beta = \dfrac{1}{q^r} \dfrac{(1 + kq^m)^2}{(k + q^m)(A + Bq^m + Cq^{2m})}. \end{cases}$$

Pour chacune des racines de $q^m + k = 0$, on obtient un cycle isotrope porté par la droite $x + iy = 0$, $z = 0$, de degré 1, classe 3, indice 2 : le vecteur période polaire correspondant est nul. Pour les m racines de $kq^m + 1 = 0$, on obtient les cycles symétriques par rapport à xOz. J'exprime maintenant que le cône C ne possède plus que les deux cycles $q = 0$, $q = \infty$ en dehors de ceux-là et j'ai ainsi

$$(43)\qquad k^2 + AC = 0, \qquad (A + C)B + 2k(1 + k^2) = 0,$$

équations qui permettent, par exemple, d'exprimer explicitement C et B au moyen des deux arbitraires indépendantes A et k. Nous n'avons plus maintenant qu'une relation résiduelle à écrire, qui sera de la forme $\frac{r}{m} = F(A, k)$, où F est une fraction rationnelle en A et k ; il suffira donc de déterminer la limite inférieure et supérieure l et L de la fraction F dans le champ réel A, k ; pour toute valeur rationnelle de $\frac{r}{m}$ comprise entre l et L, on aura donc des courbes réelles (43) à un paramètre. J'indique rapidement les calculs : on a, P_1 désignant un certain polynome du quatrième degré en x et posant $q^m = x$,

$\lambda = 1 + 4k^2 + k^4 + A^2 + B^2 + C^2$:

$$(44)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\alpha}{dq} = \dfrac{q^{r-1}(x+k)^2 P_4}{(kx+1)^2(Ax^2+Bx+C)^2}, \\ \dfrac{\beta^2 \dfrac{d\alpha}{dq}}{(1+\alpha\beta)^2} = \dfrac{P_4(1+kx)^4}{\lambda^2 q^{4m+r+1}}, \\ \dfrac{\beta \dfrac{d\alpha}{dq}}{(1+\alpha\beta)^2} = \dfrac{P_4(A+Bx+Cx^2)(k+x)(1+kx)}{\lambda^2 x^4 q}. \end{array}\right.$$

Il nous suffit d'étudier les trois intégrales

$$\int \frac{\beta^2 d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}, \quad \int \frac{\alpha^2 d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}, \quad \int \frac{\beta\, d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2},$$

dont les deux premières se transforment l'une en l'autre en changeant q en $\frac{1}{q}$. Comme vérification de la théorie, nous constatons que les cycles $kq^m + 1 = 0$ ou $q^m + k = 0$ ne jouent aucun rôle dans les intégrales

$$\int \frac{\beta^2 d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}, \quad \int \frac{\alpha^2 d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}.$$

Il n'y a qu'à annuler le coefficient de x^4 dans le produit

$$P_4(A + Bx + Cx^2)(k + x)(1 + kx)$$

et nous avons ainsi

$$(45)\qquad \frac{r}{m} = \frac{\left\{\begin{array}{l} (Ak^2 + Bk + A)(3Ak^2 - Bk - A) \\ \quad + [Bk^2 + (A + C)k + B][2Bk^2 + 2(A - C)k - 2B] \\ \quad + (Ck^2 + Bk + C)(Ck^2 + Bk - 3C) \end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l} A^2k^2 + (A + Bk + Ak^2)^2 \\ \quad + [B + (A + C)k + Bk^2]^2 + (C + Bk + Ck^2)^2 + k^2C^2 \end{array}\right\}}.$$

A condition de faire tourner C de 180° autour de Oy, ce qui revient comme on a vu à échanger α et β, on peut remplacer r par $-r$, donc $l = -L$. Nous remarquons que si A augmente indéfiniment, k étant fixe, C tend vers zéro ainsi que B et le second membre de (45) tend vers $\frac{3k^4 + 4k^2 - 1}{k^4 + 4k^2 + 1}$, fraction susceptible de prendre toutes les valeurs entre -1 et $+3$. Donc, on a $3 \leq L$ et ceci prouve que si $\frac{r}{m}$, en nous

bornant aux valeurs positives de r, est inférieur à 3, nous avons des courbes réelles $(\mathcal{A})$ à 1 paramètre.

Le degré du cône C est $2(3m+r)$; il y a $2m$ cycles isotropes de degré 1, classe 3, indice 2 et 2 cycles isotropes de degré et classe égaux à r et d'indice $4m+2r$. Le degré de $(\mathcal{A})$ est $10m+2r$. Comme les plus faibles valeurs de m et r sont respectivement $m=2$, $r=1$, la courbe la plus simple sera de degré 22, et il en existe, qui sont réelles, de ce type, puisque $\frac{1}{2}$ est dans l'intervalle convenable pour $\frac{r}{m}$. Ici encore on peut obtenir des courbes de degré arbitrairement grand, à un nombre de cycles isotropes arbitrairement grand, mais tous ces cycles sont portés par deux droites seulement, à savoir $z=0$, $x\pm iy=0$.

Si l'on ne se préoccupe pas de la réalité, il n'y a aucune condition à imposer à r et m, sauf $m>1$. Il n'est pas sans intérêt de remarquer que si l'on a des solutions où A et C sont réelles, B et k imaginaires pures, le cône C est réel $(\mathcal{G})$, la courbe $(\mathcal{A})$ étant elle aussi réelle $(\mathcal{G})$. On s'en aperçoit en écrivant $k=ik_1$, $B=iB_1$, $q=jq_1$, où j est une racine primitive de $j^m=i$: la vérification se fait exactement comme pour $m=1$, $r=0$, exemple du cône du sixième degré traité directement au Chapitre III. Or si, dans les équations (44) et (45), on remplace k par ik_1 et B par iB_1, on aura à faire un calcul de limites l, L analogue à celui déjà fait, conduisant à la fraction $\frac{3k_1^4-4k_1^2-1}{k_1^4-4k_1^2+1}$, laquelle varie de $-\infty$ à $+\infty$; donc pour toutes les valeurs de la fraction $\frac{r}{m}$ on obtient des cônes réels $(\mathcal{G})$ à un paramètre, ce qui est intéressant au point de vue des surfaces applicables sur le paraboloïde et des surfaces minima réelles circonscrites à une sphère.

12. Je donne un dernier exemple qui sera fondamental pour arriver aux cônes unicursaux à directrice spherique non unicursale. J'écris les équations

$$(49)\qquad \begin{cases} x=q^r\,\dfrac{(q^m+k)^3(q^m-k)(q^m+A)}{(1-kq^m)^3(1+kq^m)(1-Aq^m)}, \\ z=\dfrac{1}{q^r}\,\dfrac{(1+kq^m)^3(1-kq^m)(1+Aq^m)}{(q^m-k)^3(q^m+k)(q^m-A)} \end{cases}$$

qui définissent, A et k étant réelles, une courbe unicursale (𝔅) ayant zOx pour plan de symétrie. Je me borne, pour abréger, aux valeurs impaires pour m et paires pour r, m étant supposé supérieur à 1 et premier avec r. Dans ces conditions, le changement de q en $-q$ remplace α par $-\frac{1}{\beta}$, donc la courbe (𝔅) est mixte. Le cône C est alors de degré $5m+r$, il admet m cycles isotropes d'indice 2 obtenus pour $q^m=\pm k$ portés par la droite $x+iy=0$, $z=0$; le degré de ces cycles étant 1 et la classe 3, ces cycles ont leur vecteur période nul. Les racines de $q^m=\pm\frac{1}{k}$ donnent les m cycles à la fois conjugués et symétriques des précédents. En écrivant que le cône C ne possède plus que deux autres cycles isotropes d'indice $3m+r$ pour $q=0$, $q=\infty$, on obtient l'unique relation

$$2(1+k^2)A+(1+A^2)k=0. \tag{47}$$

L'unique condition résiduelle donnée par ce couple provient de $\int\frac{\beta\,d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}$; c'est

$$\frac{r}{m}=\frac{\left\{\begin{array}{l}3(k^3-1)[2k^2A^2+(1+k^4)(1+A^4)]\\ \quad+2(A^2k^2-1)\\ \quad\quad\times[2Ak(1+k^2+k^4)+(1-k^2)(1+k^4)(1-A^2)]\\ \quad+2(1+k^2+k^4)(k-A)(1-Ak)[A(1-k^2)-k(1-A^2)]\end{array}\right\}}{4k^2A^2(1+k^4)+(1+A^4)(1+4k^2+k^8)}. \tag{48}$$

Suivant la méthode habituelle, construisons la courbe (47) dans un plan ωAk, c'est une cubique, et cherchons entre quelles limites varie le second membre de (48), quand le point A, k décrit la cubique.

On peut remarquer que les changements

$$\left\{\begin{array}{llll} q, & r, & A, & k\\ \frac{1}{q}, & r, & \frac{1}{A}, & \frac{1}{k}\end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{llll} q, & r, & A, & k\\ -q, & r, & -A, & -k\end{array}\right.$$

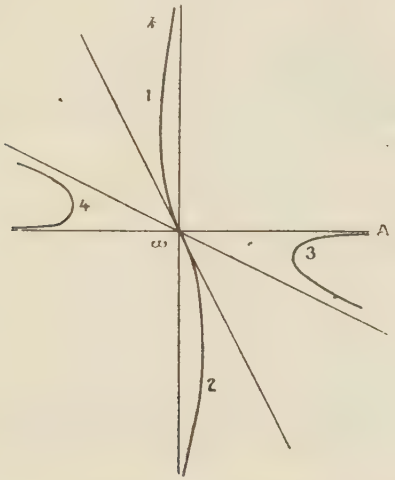
reviennent à changer α et β de signe, donc donnent la même courbe (𝔅) à une rotation près.

L'équation de la cubique, mise sous la forme

$$(2k+A)Ak+2A+k=0,$$

met en évidence les trois asymptotes et la tangente à l'origine. L'échange $\left(A, k; \frac{1}{A}, \frac{1}{k}\right)$ transforme la branche 1 en la branche 4, la branche 2 en la branche 3; en raison de la symétrie de 1 et 2, je me bornerai donc à la seule branche 2, sur laquelle le second membre de (48) varie de -5, quand le point (A, k) part de ω jusqu'à $+3$ pour le point à l'infini sur la partie négative de ωk.

Fig. 8.



Il résulte de là que si l'on s'arrange pour prendre r toujours positif, à toute valeur positive de $\frac{r}{m}$ inférieure à 3 correspondent au moins deux courbes unicursales de ce type (non égales entre elles) et à toute valeur de $\frac{r}{m}$ comprise entre 3 et 5 en correspond au moins une. Les courbes ainsi obtenues ne renferment pas de paramètre arbitraire; la plus petite valeur de m, en nous bornant aux nombres impairs, est 3 : prenant $m = 3$, pour $r = 2, 4, 6, 8$, on a au moins deux courbes réelles; pour $r = 10, 12, 14$, on a une courbe réelle au moins.

J'aurai besoin ultérieurement de l'exemple relatif à $m = 3$, $r = 2$,

Le cône C est alors de degré 17, chacune des deux droites $x \pm iy = 0$, $z = 0$ porte quatre cycles isotropes dont trois sont d'indice 2 et le quatrième d'indice 11. La courbe $(\mathcal{A})$ est alors du degré 26. Pour cette courbe particulière, j'aurai besoin de la directrice plane dans le plan $z = 1$: je formerai donc les quantités

$$\lambda = \frac{c + ic'}{c''} = \frac{2\alpha}{\alpha\beta - 1}, \qquad \mu = \frac{2\beta}{\alpha\beta - 1}.$$

On trouve ainsi

$$(49)\quad \begin{cases} \alpha = q^2 \dfrac{(q^3+k)^3(q^3-k)(q^3+\mathrm{A})}{(1-kq^3)^3(1+kq^3)(1-\mathrm{A}q^3)}, \qquad \beta = \dfrac{1}{q^2}\dfrac{(1+kq^3)^3(1-kq^3)(1+\mathrm{A}q^3)}{(q^3-k)^3(q^3+k)(q^3-\mathrm{A})}, \\ \lambda = \dfrac{q^2(q^6-k^2)^3(q^6-\mathrm{A}^2)}{(1-k^2q^6)[\mathrm{A}k^2(q^{18}+1)+[\mathrm{A}(1+5k^2+k^4)+2k(1+k^2)(1+\mathrm{A}^2)](q^{12}+q^6)]}, \\ \mu = \dfrac{(1-k^2q^6)^3(1-\mathrm{A}^2q^6)}{q^2(q^6-k^2)[\mathrm{A}k^2(q^{18}+1)+[\mathrm{A}(1+5k^2+k^4)+2k(1+k^2)(1+\mathrm{A}^2)](q^{12}+q^6)]}; \end{cases}$$

où A et k sont certaines constantes numériques bien déterminées que je ne calcule pas; il nous suffit de savoir qu'il y a deux systèmes (au moins) de valeurs pour A et k.

13. Les paragraphes précédents, à partir du n° 8, font concevoir d'une façon tout intuitive que si nous connaissons par un moyen quelconque une courbe $(\mathcal{A})$ unicursale correspondant à la directrice sphérique $(\mathfrak{B})$

$$(\mathfrak{B}) \qquad \alpha = q^\rho f(q), \qquad \beta = \frac{1}{q^\rho} f_0\left(\frac{1}{q}\right),$$

où ρ est un entier positif ou nul, f et f_0 deux fractions rationnelles à coefficients imaginaires conjugués, il y aura toute une série de courbes $(\mathcal{A}_1)$ unicursales elles aussi, se déduisant de la première par le procédé suivant : si ρ n'est pas nul, le cône C admet le couple isotrope $q = 0$, $q = \infty$; si ρ est nul, je supposerai encore que f et f_0 soient choisies de sorte que $q = 0$ et $q = \infty$ donnent un couple isotrope sur C; à ce couple de C correspondra, sur le nouveau cône C_1, le couple isotrope $z = 0$, $x \pm iy = 0$ et le cône C_1 admettra Oz pour axe de rotation; si C n'a qu'un couple isotrope, le cône C_1 n'aura que ce couple isotrope $z = 0$, $x \pm iy = 0$; si le cône C a d'autres couples isotropes,

à chacun de ces couples, nous faisons correspondre sur C_1 un ensemble de m couples isotropes, déduits de l'un d'eux par des rotations successives de l'angle $\frac{2\pi}{m}$ autour de Oz, l'indice de chacun d'eux étant égal à celui du couple correspondant de C. On arrivera au résultat en appelant F ce que devient la fraction connue f, si on la recopie en remplaçant chaque coefficient par un coefficient indéterminé; les équations de $(\mathfrak{B}_1)$ seront de la forme

$$(\mathfrak{B}_1) \qquad \alpha = q^r \mathrm{F}(q^m), \qquad \beta = \frac{1}{q^r}\mathrm{F}_0\left(\frac{1}{q^m}\right).$$

Dans les paragraphes qui précèdent, ce procédé a été utilisé, nous avons vu que les calculs nécessaires pour trouver $(\mathcal{A}_1)$ sont calqués sur ceux qui conduisent à la courbe $(\mathcal{A})$ et qu'en général, ils sont même plus faciles, surtout si l'on considère la fraction $\frac{r}{m}$ comme une nouvelle inconnue.

Je vais préciser; mais je rappelle un résultat relatif au degré et à la classe des cycles isotropes du cône C, quand on suppose ce cône C satisfaisant aux conditions voulues pour que $(\mathcal{A})$ soit algébrique : au Chapitre II (§ 4 et suivants), j'ai choisi les axes et le paramètre de façon qu'un cycle isotrope corresponde aux développements $\lambda = \mathrm{B}t^q + \ldots, \mu = \frac{\mathrm{A}}{t^p} + \ldots$; on en a déduit, si $q > p$, $\alpha = \frac{2}{\mathrm{A}}t^p + \ldots$, $\beta = \frac{2}{\mathrm{B}}\frac{1}{t^q} + \ldots$, et si $q = p$, $\alpha = \mathrm{B}t^p + \ldots$, $\beta = \frac{\mathrm{A}}{t^p} + \ldots$, de sorte que de toutes façons les quantités α et $\frac{-1}{\beta}$ admettent toutes deux la racine $t = 0$ avec un degré indiquant le degré et la classe du cycle $t = 0$; si l'on remplace $(\mathfrak{B})$ par $(\mathfrak{B}')$, α et $\frac{-1}{\beta}$ s'échangent, donc il nous suffira d'indiquer que le plus petit des deux exposants de t donne le degré du cycle et l'autre la classe. On verra aisément, au paragraphe 6 de ce Chapitre entre autres, que, si le cône C est simplement unicursal sans que $(\mathcal{A})$ soit algébrique, ce résultat n'est plus nécessairement vérifié.

14. Soit donc un cône C connu donnant une courbe $(\mathcal{A})$ unicursale, la directrice $(\mathfrak{B})$ étant unicursale. Je porte mon attention sur un couple

isotrope $G_1G'_1$ de C et je suppose le paramètre habituel q choisi de façon que ce couple s'obtienne pour $q=0$, $q=\infty$. Quant aux axes de coordonnées, je peux supposer que le plan xOy coïncide avec le plan OGG'_1, ou en diffère.

Soit le premier cas; j'ai alors à distinguer si le couple $G_1G'_1$ est du type où le degré et la classe du cycle isotrope sont égaux ou du type où la classe surpasse le degré.

J'adopte la première hypothèse : soit ρ le degré et la classe du cycle $q=0$. Les équations de $(\mathfrak{W})$ sont alors

$$(50)\qquad \begin{cases} \alpha = q^{\rho}\,\dfrac{q^h + a_1 q^{h-1} + \ldots + a_h}{bq^h + b_1 q^{h-1} + \ldots + b_h}, \\ \beta = \dfrac{1}{q^{\rho}}\,\dfrac{1 + a'_1 q + \ldots + a_h q^h}{b + b'_1 q + \ldots + b_h q^h}; \end{cases}$$

où b, a_h, b_h sont trois quantités réelles non nulles, a_1 et a'_1, ... des couples de constantes conjuguées. Les indices des divers couples isotropes de C sont mis en évidence par l'identité

$$(51)\qquad \begin{aligned} &(q^h + a_1 q^{h-1} + \ldots + a_h)(1 + a'_1 q + \ldots + a_h q^h) \\ &+ (bq^h + b_1 q^{h-1} + \ldots + b_h)(b + b'_1 q + \ldots + b_h q^h) \\ &\equiv l q^{p_1}(q + k_2)^{p_2}(k'_2 q + 1)^{p_2}\ldots, \end{aligned}$$

qui exprime que le couple $G_1G'_1$ a pour indice $2(\rho + p_1)$, que le couple $G_2G'_2$ correspondant à $q=-k_2$ ou $q=\dfrac{-1}{k'_2}$ a pour indice $2p_2$, etc.

Nous allons chercher un nouveau cône C_1 de directrice $(\mathfrak{W}_1)$:

$$(52)\qquad \begin{cases} \alpha = q^{r}\,\dfrac{q^{hm} + A_1 q^{(h-1)m} + \ldots + A_h}{Bq^{hm} + B_1 q^{(h-1)m} + \ldots + B_h}, \\ \beta = \dfrac{1}{q^r}\,\dfrac{1 + A'_1 q^m + \ldots + A_h q^{hm}}{B + B'_1 q^m + \ldots + B_h q^{hm}}, \end{cases}$$

où les lettres A, B sont, cette fois, des inconnues et j'écris l'identité

$$(53)\qquad \begin{aligned} &(x^h + A_1 x^{h-1} + \ldots + A_h)(1 + A'_1 x + \ldots + A_h x^h) \\ &+ (Bx^h + B_1 x^{h-1} + \ldots + B_h)(B + B'_1 x + \ldots + B_h x^h) \\ &\equiv L x^{p_1}(x + K_2)^{p_2}(K'_2 x + 1)^{p_2}\ldots \end{aligned}$$

calquée sur l'identité (51) : de la sorte les deux droites $x \pm iy = 0$

et $z = 0$ seront des génératrices isotropes de C_1, comme sur C; les deux cycles correspondants ont pour degré et classe sur C_1 le nombre r et pour indice $2(r + p_1 m)$. Ce couple joue sur C et C_1 un rôle exceptionnel : prenons maintenant le couple $G_2 G_2'$ de C, qui a pour indice $2p_2$: il lui correspond sur C_1 un *groupement* de m couples isotropes, d'indice $2p_2$ aussi, correspondant aux racines de $q^m + K_2 = 0$ ou $K_2' q^m + 1 = 0$; et ainsi pour les autres couples de C. Si donc le cône C admet n couples de génératrices isotropes conjuguées, le cône C_1 admet un nombre total de $2 + 2(n - 1)$ m génératrices isotropes; il y a augmentation du nombre si n est supérieur à 1.

Pour être tout à fait général, il faut prévoir le cas où le cône C ou bien le cône C_1, soit séparément, soit simultanément, sont à directrice sphérique mixte : dans ce cas, il n'y a qu'à procéder comme si, par inadvertance, ce résultat avait échappé : le couple unique d'indice impair sera traité comme ayant un indice *factice* double de son indice *strict;* les deux génératrices de chaque couple d'indice pair sont obtenues deux fois chacune pour deux valeurs de q distinctes, liées par une certaine relation involutive; nous traiterons l'une et l'autre valeur de q comme donnant deux génératrices isotropes distinctes, ayant pour indice l'indice effectif de cette génératrice en réalité unique. Le cône sera lui-même considéré comme ayant un degré factice double de son degré strict. Si c'est le cône C qui a une directrice mixte, le couple exceptionnel de C pourra être soit le couple d'indice impair, soit un des couples d'indice pair; mais si c'est C_1 qui a une directrice mixte, ce sera nécessairement le couple exceptionnel de C_1 qui est à indice impair. Le lecteur se convaincra aisément de l'utilité de cette extension en se rappelant que même pour le cas très simple

$$\alpha = q^r \frac{q^m - B}{B q^m - 1}, \qquad \beta = \frac{1}{q^r} \frac{1 - B q^m}{B + q^m},$$

on peut avoir, suivant les parités de m et r, soit une directrice mixte, soit une directrice unicursale à plan de symétrie.

Ceci posé, pour que le cône C_1 conduise à une courbe $(\mathcal{A}_1)$ unicursale, il faut écrire que l'identité (53) est vérifiée, puis que les conditions résiduelles correspondant à chaque groupement isotrope sont

vérifiées. Je regarde donc

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_h;\quad B,\ B_1,\ \ldots,\ B_h;$$
$$A'_1,\ \ldots,\ A'_{h-1};\quad B'_1,\ \ldots,\ B'_{h-1};$$
$$L,\ K_2,\ K'_2,\ \ldots$$

comme des inconnues ainsi que la fraction irréductible $\frac{r}{m}$. Or, les relations provenant de l'identité (53) admettent manifestement une solution toute connue, à savoir

$$A_1 = a_1,\quad A_2 = a_2,\quad \ldots,\quad B = b,\quad \ldots,\quad L = l,\quad K_2 = k_2,\quad \ldots.$$

D'autre part, les conditions résiduelles provenant du groupement $q^m = -K_2$ et $q^m = \frac{-1}{K'_2}$ se composent des équations ainsi obtenues : j'annule le vecteur période relatif à *une* des génératrices $q^m = -K_2$, d'où trois équations au plus, auxquelles j'adjoins les équations conjuguées. Ceci résulte comme on l'a vu de ce que les vecteurs périodes des cycles $q^m = -K_2$ dérivent les uns des autres par des rotations successives de l'angle $\frac{2\pi}{m}$ autour de Oz. Les équations fournies par ce groupement admettent aussi la solution indiquée à l'instant à laquelle il faut incorporer $\frac{r}{m} = \rho$, puisque $\frac{r}{m}$ est aussi considérée comme inconnue. Ce résultat est tout à fait évident, si l'on songe que les intégrales à étudier sont de la forme

$$\int q^{r-1} F(q^m)\,dq, \qquad \text{ou} \qquad \int \frac{F(q^m)}{q^{r+1}}\,dq, \qquad \text{ou} \qquad \int \frac{F(q^m)\,dq}{q},$$

où F est une certaine fraction rationnelle; la théorie classique des fractions rationnelles donne un grand nombre de moyens de le vérifier, je ne m'y attarde pas. Les calculs peuvent être dirigés de façon à ne faire aucune hypothèse sur la fraction $\frac{r}{m}$ et subsistent pour $m = 1$, r quelconque, égal à ρ en particulier, du moment qu'il ne s'agit pas du couple $q = 0$, $q = \infty$. Enfin, il faut considérer le couple $q = 0$, $q = \infty$: puisqu'on a annulé les vecteurs périodes de tous les autres cycles isotropes, on se borne à considérer le cycle $q = 0$: sur C_1, il donne une seule relation résiduelle provenant de $\int \frac{\beta\,d\alpha}{(1 + \alpha_1\beta)^r}$, intégrale de la forme $\int \frac{F(q^m)\,dq}{q}$, ou encore, en posant $q^m = x$, de la forme $\int \frac{F(x)\,dx}{x}$; cette

condition est encore valable pour $m = 1$, $r = \rho$; elle admet donc la solution connue que nous avons indiquée. Donc toutes les conditions relatives au cône C_1 sont vérifiées quand on substitue C à C_1 : d'après ce qui a été expliqué dans les paragraphes précédents, les équations fournies par C_1 sont donc compatibles, quelle que soit la valeur rationnelle donnée à $\frac{r}{m}$, sauf peut-être pour certaines valeurs exceptionnelles; et si C, le cône connu, est réel, dans bien des cas, on pourra en déduire une infinité de cônes C_1 réels, pourvu que $\frac{r}{m}$ reste entre certaines limites.

Il faut bien remarquer que les équations de conditions du cône C_1, recopiées en remplaçant les grandes lettres par les petites et $\frac{r}{m}$ pour ρ sont toujours valables, si l'on y regarde les petites lettres comme des inconnues; mais quand on se préoccupe de trouver le cône C lui-même, il y a à considérer le vecteur période du cycle $q = 0$: ce vecteur donne non seulement une relation provenant de $\int \frac{\beta\, d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}$, mais encore celles qui proviennent de $\int \frac{d\alpha}{(1+\alpha\beta)^2}$ et $\frac{d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}$: ces deux dernières relations disparaissent automatiquement sur C_1, le vecteur période étant alors dirigé suivant Oz, mais il n'arrive pas en général qu'il en soit de même pour le cône C; si donc on considère le cône C lui-même comme inconnu, on peut profiter des calculs faits pour C_1, mais il y aura souvent à ajouter une ou deux équations complémentaires; par conséquent, le système relatif à C_1 sera, en général, plus simple que le système relatif à C; il peut arriver que l'on puisse trouver des solutions pour C_1, sans qu'il en existe pour le cône C, mais le résultat essentiel pour nous est le suivant, c'est que, si un cône C existe, on en déduit immédiatement l'existence d'une infinité de cônes C_1, de degré arbitrairement grand; la réalité reste le point délicat. Tout ceci a été vérifié en étudiant les directrices

$$x = -q^r \frac{q^m + \Lambda}{\mathrm{B} q^m + \mathrm{C}}, \qquad \beta = \frac{1}{q^r} \frac{1 + \Lambda q^m}{\mathrm{B} + q \mathrm{C}^m} \qquad \text{(Chap. III, § 7)},$$

ou encore

$$x = -q^r \frac{q^{hm} + \Lambda_1 q^{(h-1)m} + \ldots + \Lambda_h}{\mathrm{B} q^{hm} + \mathrm{B}_1 q^{(h-1)m} + \ldots + \mathrm{B}_h}, \qquad \beta = \frac{1}{q^r} \frac{1 + \Lambda_1 q^m + \ldots + \Lambda_h q^{hm}}{\mathrm{B} + \mathrm{B}_1 q^m + \ldots + \mathrm{B}_h q^{hm}}$$

(Chap. IV, § 9),

ou encore

$$\alpha = q^r \frac{(q^m + k)^3}{(kq^m + 1)(Aq^{2m} + Bq^m + C)}, \qquad \beta = \frac{1}{q^r} \frac{(1 + kq^m)^3}{(k + q^m)(A + Bq^m + Cq^{2m})}$$

(Chap. III, § 14, et Chap. IV, § 11).

15. Je reprends la seconde hypothèse : j'ai pris le plan OGG′ du couple exceptionnel de C pour plan xOy, ce couple est fourni par $q = 0$, $q = \infty$. Mais cette fois le cycle $q = 0$ est de degré ρ, classe $\rho + s$ et indice 2ρ. Les équations de la directrice (𝔇) sont donc

$$(54) \qquad \begin{cases} \alpha = q^\rho \dfrac{q^h + a_1 q^{h-1} + \ldots + a_h}{b_s q^{h-s} + \ldots + b_h}, \\ \beta = \dfrac{1}{q^\rho} \dfrac{1 + a'_1 q + \ldots + a_h q^h}{b'_s q^s + \ldots + b_h q^h}. \end{cases}$$

et l'on a une identité

$$(55) \qquad \begin{aligned} &(q^h + a_1 q^{h-1} + \ldots + a_h)(1 + a'_1 q + \ldots + a_h q^h) \\ &\quad + (b_s q^{h-s} + \ldots + b_h)(b'_s q^s + \ldots + b_h q^h) \\ &\equiv l(q + k_1)^{p_1}(k'_1 q + 1)^{p_1}(q + k_2)^{p_2}(k'_2 q + 1)^{p_2} \ldots, \end{aligned}$$

le couple $q = 0$, $q = \infty$ est d'indice 2ρ et l'identité (55) met en évidence les autres couples, tels que $q = k_1$, $q = \frac{-1}{k'_1}$ d'indice $2p_1$, etc.

Pour le cône inconnu C_1, j'écrirai

$$(56) \qquad \alpha = q^r \frac{q^{mh} + A_1 q^{(h-1)m} + \ldots + A_h}{B_1 q^{(h-1)m} + \ldots + B_h}, \qquad \beta = \frac{1}{q^r} \frac{1 + A'_1 q^m + \ldots + A_h q^{mh}}{B'_1 q^m + \ldots + B_h q^{mh}}$$

et j'écrirai l'identité

$$(57) \qquad \begin{aligned} &(x^h + A_1 x^{h-1} + \ldots + A_h)(1 + A'_1 x + \ldots + A_h x^h) \\ &\quad + (B_1 x^{h-1} + \ldots + B_h)(B'_1 x + \ldots + B'_h x^h) \\ &\equiv L(x + k_1)^{p_1}(K'_1 x + 1)^{p_1} \ldots, \end{aligned}$$

au couple GG′ de C correspond le couple $q = 0$, $q = \infty$ sur C_1 d'indice $2r$, de degré r : la classe des deux cycles en question est $r + m$ si B_1 est différent de zéro; si B_1 est nul, supposons que B_j soit le

premier coefficient non nul, la classe sera $r + jm$; mais, peu importe, $A_1, A_2, \ldots, A_h, A'_1, \ldots, A'_{h-1}$; $B_1, \ldots, B_h, B'_1, \ldots, B'_{h-1}$ sont des inconnues ainsi que L, K_1, K'_1, ... Sauf la légère modification relative au couple exceptionnel sur C et C_1, tout ce qui a été dit au numéro précédent subsiste intégralement.

Enfin, si je prends la troisième hypothèse, à savoir celle où je prends comme plan xOy un plan différent du plan $G_1G'_1$ du couple exceptionnel de C, j'écris pour équations de $(\mathfrak{V}_5)$

$$(58) \qquad \alpha = \frac{q^h + a_1 q^{h-1} + \ldots + a_h}{bq^h + b_1 q^{h-1} + \ldots + b_h}, \qquad \beta = \frac{1 + a'_1 q + \ldots + a_h q^h}{b + b'_1 q + \ldots + a_h q^h}$$

avec l'identité

$$(59) \quad (q^h + a_1 q^{h-1} + \ldots + a_h)(1 + a'_1 q + \ldots + a_h q^h) + (bq^h + \ldots + b_h)(b + b'_1 q + \ldots + b_h q^h) \equiv l q^{p_1} (q + k_2)^{p_2} (k'_2 q + 1)^{p_3} \ldots.$$

Pour le cône inconnu C_1, j'écris les équations de $(\mathfrak{V}_1)$

$$(60) \quad \alpha = q^r \frac{q^{hm} + A_1 q^{(h-1)m} + \ldots + A_h}{Bq^{hm} + B_1 q^{(h-1)m} + \ldots + B_h}, \qquad \beta = \frac{1}{q^r} \frac{1 + A'_1 q^m + \ldots + A_h q^{hm}}{B + B'_1 q^m + \ldots + B_h q^{hm}}$$

et l'identité

$$(61) \quad (x^h + A_1 x^{h-1} + \ldots + A_h)(1 + A'_1 x + \ldots + A_h x^h) + (Bx^h + B_1 x^{h-1} + \ldots + B_h)(B + B'_1 x + \ldots + B_h x^h) \equiv L x^{p_1} (x + K_2)^{p_2} (K'_2 x + 1)^{p_3} \ldots.$$

Sur C_1, le couple exceptionnel donné par $q = 0$, $q = \infty$ coïncide avec les deux droites $z = 0$, $x \pm iy = 0$ distinctes cette fois de $G_1G'_1$; $G_1G'_1$ ont pour indice $2p_1$ sur C, mais pour degré et classe des nombres qui ne sont plus mis en évidence; sur C_1, le couple exceptionnel a pour degré et classe r et pour indice $2r + p_1 m$. A partir de ce moment, tout ce qui a été dit au paragraphe précédent subsiste : d'ailleurs, ce dernier cas revient à supposer $p = 0$ dans les formules du premier cas.

Dans les trois cas, les équations de condition du cône C_1, recopiées en y faisant $\frac{r}{m} = \rho$, ρ étant le nombre positif ou nul relatif à C, sont vérifiées par les coefficients de C : donc les équations fournies par C_1 sont nécessairement compatibles si le cône C existe et il arrivera souvent, au cas où C est réel, que, si le nombre rationnel $\frac{r}{m}$ reste suffisamment voisin de ρ, le cône C_1 lui-même soit réel. Comme les coefficients de C doivent souvent satisfaire non seulement à ces équations recopiées, mais à une ou deux équations complémentaires, si nous considérons le cône C lui-même comme inconnu, le cône C_1 contiendra 0, 1 ou 2 paramètres arbitraires de plus que C dans le cas où le couple exceptionnel de C_1 coïncide dans l'espace avec le couple exceptionnel de C; dans le cas où le couple exceptionnel de C_1 est un couple isotrope distinct du couple exceptionnel de C, il y aura à ajouter à ce nombre de paramètres supplémentaires les deux unités qui sont introduites par la détermination d'un plan arbitraire passant par l'origine : C_1 contient donc cette fois, 2, 3, 4 paramètres arbitraires de plus que C. Je n'ai parlé, bien entendu, que des paramètres de *forme*, rejetant ceux qui correspondent à un *déplacement* ou une *homothétie*.

La transformation appliquée à un cône C qui n'a qu'un couple isotrope n'est pas très intéressante en ce sens qu'elle n'augmente pas le nombre des points à l'infini de la courbe (A). Et c'est pour cela qu'il était indispensable de trouver des exemples de cônes unicursaux ayant au moins deux couples isotropes. J'ai dit qu'il était nécessaire ici d'introduire le cas échéant un degré factice pour les cônes, un indice factice pour les cycles isotropes. Le résultat a été que, pour les couples non exceptionnels de C, l'indice est conservé, un couple C étant remplacé sur C_1 par un groupement de m couples, tandis que l'indice du couple exceptionnel change en passant de C à C_1 : j'indique dans les trois cas la valeur de l'indice sur C et C_1 du couple exceptionnel :

(C) $\qquad 2(\rho + p_1), \quad 2\rho, \quad 2p_1;$

(C_1) $\qquad 2(r + p_1 m), \quad 2r, \quad 2(r + p_1 m).$

Jusqu'ici, la transformation, telle qu'elle a été exposée, suppose C

à directrice sphérique unicursale ou mixte et livre un cône C_1, lui aussi, à directrice sphérique unicursale ou mixte.

16. Il n'y a plus qu'un léger effort à faire pour arriver à des cônes unicursaux de directrice sphérique non unicursale. L'exemple le plus simple, lorsqu'on n'exige pas que la courbe (λ) soit algébrique, est un cône unicursal du sixième ordre à quatre génératrices isotropes d'indice 3, mais nous savons qu'un indice 3 est incompatible avec l'algébricité de la courbe (λ); donc l'exemple le plus simple, en courbes (λ) algébriques, ne peut être obtenu qu'avec un cône unicursal du dixième ordre à quatre génératrices isotropes d'indice 5. Ce type existe, nous l'obtiendrons au Chapitre suivant confondu par la nature intime des choses avec des cônes non unicursaux. Nous allons en obtenir ici d'autres types, grâce à la transformation qui précède, réalisée cette fois, non plus avec la directrice sphérique (ω), mais avec la directrice plane σ. Il est nécessaire de donner quelques explications préliminaires : Avec les notations adoptées λ, μ et le paramètre habituel q, la courbe unicursale plane réelle la plus générale est représentée par des équations paramétriques

$$(62)\qquad \lambda = q^{\rho}\frac{aq^{h}+a_1q^{h-1}+\ldots+a_h}{bq^{h}+b_1q^{h-1}+\ldots+b_h},\qquad \mu=\frac{1}{q^{\rho}}\frac{a'+a'_1q+\ldots+a'_hq^{h}}{b'+b'_1q+\ldots+b'_hq^{h}},$$

où $a, a_1, \ldots, a_h$; $b, b_1, \ldots, b_h$ sont des constantes ayant pour conjuguées $a', a'_1, \ldots, a'_h$; $b', b'_1, \ldots, b'_h$; ρ est un entier positif, nul, ou négatif. On pourra remarquer qu'une racine de $bq^h+\ldots+b_h$, non racine de $b'+b'_1q+\ldots+b'_hq^h$, donne une génératrice isotrope de C pour laquelle λ est infini, μ fini, autrement dit pour laquelle le plan tangent au cône C n'est pas confondu avec le plan tangent au cône $x^2+y^2+z^2=0$: donc si cela a lieu, la courbe (λ) n'est pas algébrique (Chap. II, § 4). Si nous voulons que (λ) soit algébrique, il faut donc qu'une telle racine, si elle existe, soit racine du numérateur de μ avec un degré de multiplicité au moins égal; il en sera de même pour les racines du dénominateur de μ qui ne sont pas racines du dénominateur de λ, elles annuleront le numérateur de λ. Finalement, en se bornant aux courbes σ conduisant à une courbe (λ) unicursale,

on aura

$$(63)\quad \begin{cases} \lambda = q^{\rho}\,\dfrac{aq^h + a_1 q^{h-1} + \ldots + a_h}{(bq^h + b') + (b_1 q^{h-1} + b'_1 q) + \ldots}\,\dfrac{c' + c'_1 q + \ldots + c'_k q^k}{cq^k + c_1 q^{k-1} + \ldots + c_k}, \\ \mu = \dfrac{1}{q^{\rho}}\,\dfrac{a' + a'_1 q + \ldots + a'_h q^h}{(bq^h + b') + (b_1 q^{h-1} + b'_1 q) + \ldots}\,\dfrac{cq^k + c_1 q^{k-1} + \ldots + c_k}{c' + c'_1 q + \ldots + c'_k q^k}; \end{cases}$$

l'entier k étant positif ou nul. Il suffira d'ailleurs de réduire λ et μ au même dénominateur pour qu'on puisse se borner à écrire

$$(64)\quad \lambda = q^{\rho}\,\frac{aq^h + a_1 q^{h-1} + \ldots + a_h}{(bq^h + b') + (b_1 q^{h-1} + b'_1 q) + \ldots}, \qquad \mu = \frac{1}{q^{\rho}}\,\frac{a' + a'_1 q + \ldots + a'_h q^h}{(bq^h + b') + \ldots}.$$

Les génératrices isotropes du cône C, en adoptant les équations (64), sont données par l'équation

$$(65)\quad \begin{aligned} &(aq^h + a_1 q^{h-1} + \ldots + a_h)(a' + a'_1 q + \ldots + a'_h q^h) \\ &\quad + [(bq^h + b') + (b_1 q^{h-1} + b'_1 q + \ldots]^2 = 0. \end{aligned}$$

Si $q = 0$ est racine de l'équation (65), l'indice commun du cycle $q = 0$ et du cycle $q = \infty$ s'obtient en ajoutant le nombre $|2\rho|$ au degré de multiplicité de la racine nulle de (65). Si $q = 0$ n'est pas racine et si ρ n'est pas nul, l'indice du cycle isotrope $q = 0$ ou $q = \infty$ est $|2\rho|$; si $q = 0$ n'est pas racine et si ρ est nul, il est clair que $q = 0$ ou $q = \infty$ ne donnent pas de génératrice isotrope. Enfin, si $q = q_0$ est racine d'ordre j de (65), $q = q_0$ et $q = \frac{1}{q'_0}$, où q'_0 désigne la conjuguée de q_0, donnent deux cycles isotropes conjugués d'indice j.

Le résultat fondamental pour notre but, c'est que cette fois, sauf pour le couple $q = 0$, $q = \infty$ qui jouera encore le rôle exceptionnel, l'indice d'un couple est égal à l'ordre de multiplicité de la racine correspondante de l'équation (65) et non plus au double de cet ordre, comme cela a lieu pour la directrice sphérique.

Je me borne en passant à donner quelques indications sur le problème consistant à déterminer un cône unicursal réel connaissant simplement le nombre de couples isotropes distincts et l'indice de chacun d'eux : on suppose qu'il y ait au moins deux couples d'indice impair, sinon le problème a été déjà résolu. On est alors ramené à trouver la solution générale de l'identité

$$(66)\quad \begin{aligned} &(aq^h + a_1 q^{h-1} + \ldots + a_h)(a' + a'_1 q + \ldots + a'_h q^h) \\ &\quad + [(bq^h + b') + (b_1 q^{h-1} + b'_1 q) + \ldots]^2 \\ &\quad - l(q + k_1)^{p_1}(k'_1 q + 1)^{p_1} \ldots \end{aligned}$$

Cette identité est un cas particulier de l'identité

$$(67)\qquad \begin{aligned}&(Aq^h + A_1 q^{h-1} + \ldots + A_h)(A' + A'_1 q + \ldots + A'_h q^h)\\ &\quad + (Bq^h + B_1 q^{h-1} + \ldots + B_h)(B' + B'_1 q + \ldots + B'_h q^h)\\ &\quad \equiv L(q + K_1)^{p_1}(K'_1 q + 1)^{p_1}\ldots\end{aligned}$$

que nous avons résolu : en écrivant $B = B'_h, B_1 = B'_{h-1}, \ldots$, on obtient un certain nombre de relations entre les arbitraires au moyen desquelles on a exprimé $A, A_1, \ldots, A'_h, A', \ldots; B, \ldots, B_h, B', \ldots, B'_h, L, K_1, K'_1, \ldots$; donc les calculs qui ont été faits précédemment permettent sinon de résoudre l'identité (66) dans tous les cas, mais de diminuer de beaucoup le nombre d'inconnues. On pourrait citer un assez grand nombre de cas où l'on peut effectivement exprimer rationnellement tous les coefficients au moyen d'un certain nombre d'arbitraires indépendantes.

17. Cela posé, je partirai comme précédemment d'un cône C connu, en distinguant trois cas comme précédemment et je calquerai les équations d'un cône inconnu C_1 sur celles de C, les deux cônes C et C_1 étant définis par leur section plane σ ou σ_1. Le couple exceptionnel de C sera toujours défini par $q = 0, q = \infty$, aura pour correspondant le couple $z = 0, x = \pm iy$ sur C_1, et l'indice de ce couple ne sera pas le même sur C ou C_1; un autre couple quelconque de C aura pour correspondant tout un groupement de m couples sur C_1, avec conservation de l'indice : cette fois, il n'y a plus lieu de distinguer un indice factice; il n'y a que l'indice strict proprement dit. Si donc le cône C n'est pas un cône à couple isotrope unique et si l'un des couples a un indice impair, il suffira d'éviter de prendre ce couple comme couple exceptionnel pour que le cône C_1 soit à directrice sphérique non unicursale, car m étant au moins égal à 2, le cône C_1 possède au moins deux couples d'indice impair. C'est pour cela que je me suis efforcé de trouver un cône à directrice mixte ayant plusieurs couples isotropes: au paragraphe 12 de ce Chapitre, nous en avons obtenu un, par des calculs très simples, et cela nous permet d'arriver enfin à un cône unicursal de directrice sphérique non unicursale.

J'indique rapidement les formules relatives aux trois cas.

Premier cas. — On a pris le plan $G_1G'_1$ pour plan xOy, le couple $G_1G'_1$ de C ayant même degré et même classe ρ, et pour

indice $2\rho + p_1$:

$$(C)\quad \begin{cases} \lambda = q^{\rho}\,\dfrac{q^h + a_1 q^{h-1} + \ldots + a_h}{(bq^h + b') + (b_1 q^{n-1} + b'_1 q) + \ldots}, \\ \mu = \dfrac{1}{q^{\rho}}\,\dfrac{1 + a'_1 q + \ldots + a'_h q^h}{(bq^h + b') + (b_1 q^{h-1} + b'_1 q) + \ldots} \\ \qquad (a_h \not\equiv 0,\ b \not\equiv 0), \\ (q^h + a_1 q^{h-1} + \ldots + a_h)(1 + a'_1 q + \ldots + a'_h q^h) \\ \qquad + [(bq^h + b') + (b_1 q^{h-1} + b'_1 q) + \ldots]^2 \\ \qquad \equiv l q^{p_1}(q + k_2)^{p_2}(k'_2 q + 1)^{p_3} \ldots ; \end{cases}$$

$$(C_1)\quad \begin{cases} \lambda = q^{r}\,\dfrac{q^{hm} + A_1 q^{(h-1)m} + \ldots + A_h}{(Bq^{hm} + B') + (B_1 q^{(h-1)m} + B'_1 q^m) + \ldots}, \\ \mu = \dfrac{1}{q^{r}}\,\dfrac{1 + A'_1 q^m + \ldots + A'_h q^{hm}}{(Bq^{hm} + B') + (B_1 q^{(h-1)m} + B'_1 q^m) + \ldots}, \\ (x^h + A_1 x^{h-1} + \ldots + A_h)(1 + A'_1 x + \ldots + A'_h x^h) \\ \qquad + [(Bx^h + B') + \ldots]^2 \\ \qquad \equiv L x^{p_1}(x + K_2)^{p_2}(K'_2 x + 1)^{p_3} \ldots . \end{cases}$$

Deuxième cas. — Le couple GG′ choisi sur C est de degré ρ, classe $\rho + s$, indice 2ρ, et l'on a pris le plan GG′ pour plan xOy :

$$(C)\quad \begin{cases} \lambda = q^{\rho}\,\dfrac{q^h + a_1 q^{h-1} + \ldots + a_{h-s} q^s}{(bq^h + b') + (b_1 q^{h-1} + b'_1 q) + \ldots}, \\ \mu = \dfrac{1}{q^{s}}\,\dfrac{1 + a'_1 q + \ldots + a'_{h-s} q^{h-s}}{(bq^h + b') + \ldots} \\ \qquad (b \not\equiv 0,\ s \geq 1), \\ (q^h + a_1 q^{h-1} + \ldots + a_{h-s} q_s)(1 + a'_1 q + \ldots + a'_{h-s} q^{h-s}) \\ \qquad + [(bq^h + b') + \ldots]^2 \\ \qquad \equiv l(q + k_2)^{p_1}(k'_1 x + 1)^{p_1} \ldots ; \end{cases}$$

$$(C_1)\quad \begin{cases} \lambda = q^{r}\,\dfrac{q^{hm} + A_1 q^{(h-1)m} + \ldots + A_{h-1} q^m}{(Bq^{hm} + B') + (B_1 q^{(h-1)m} + B'_1 q^m) + \ldots}, \\ \mu = \dfrac{1}{q^{r}}\,\dfrac{1 + A'_1 q^m + \ldots + A'_{h-1} q^{(h-1)m}}{(Bq^{hm} + B') + \ldots}, \\ (x^h + A_1 x^{h-1} + \ldots + A_{h-1} x)(1 + A'_1 x + \ldots + A'_{h-1} x^{h-1}) \\ \qquad + [(Bx^h + B') + \ldots]^2 \\ \qquad \equiv L(x + K_1)^{p_1}(K'_1 x + 1)^{p_1} \ldots . \end{cases}$$

Troisième cas. — On a pris pour plan xOy un plan arbitraire distinct du plan du couple G_1G_1' d'indice p_1 sur C.

Il suffit de supposer, dans les formules du premier cas, ρ remplacé par zéro.

J'indique dans les trois cas la valeur de l'indice sur C et C_1 du couple exceptionnel :

(C) $\qquad 2\rho + p_1, \quad 2\rho, \quad p_1,$

(C_1) $\qquad 2r + p_1 m, \quad 2r, \quad 2r + p_1 m.$

Pour les couples autres que le couple exceptionnel, l'indice se conserve et, en particulier, conserve sa parité; pour le couple exceptionnel, l'indice change : pour que ce couple soit d'indice impair sur C_1, il est nécessaire que l'indice sur C soit impair et, qu'en plus, m aussi soit impair.

Pour un cône C à directrice sphérique non unicursale, nous n'avons à notre disposition que l'emploi de σ pour cette transformation et le cône obtenu est lui aussi à directrice sphérique non unicursale. Si le cône C est à directrice sphérique unicursale proprement dite, il en est de même du cône C_1, que l'on passe par (♑) ou σ, et comme l'emploi de σ ne peut donner autre chose que l'emploi de (♑), il y a avantage à se servir de (♑) qui donne des calculs beaucoup plus simples; d'ailleurs, accidentellement, C_1 pourrait être alors à directrice mixte. Si le cône C est à directrice sphérique mixte, l'emploi de (♑) donne toujours un cône C_1 à directrice sphérique unicursale ou mixte; l'emploi de σ, si le couple d'indice impair de C joue le rôle exceptionnel, ne donne rien de plus que l'emploi de (♑), donc doit être évité comme précédemment; on emploiera donc σ en évitant de faire jouer au couple unique d'indice impair le rôle exceptionnel, ce qui implique qu'il y ait au moins deux couples isotropes sur C.

J'ajoute un dernier mot : si le cône C est lui-même un cône à axe de rotation (l'angle de rotation étant $\frac{2\pi}{m}$, où m est un entier supérieur à 1), le plan perpendiculaire à l'axe de rotation coupe C suivant un couple isotrope et les autres couples de C se répartissent en groupements de m couples dans chaque groupement; si j'applique la trans-

formation qui précède (avec (65) en σ suivant le cas) en prenant un axe des z distinct de l'axe de rotation de C, il n'y a rien à dire, la rotation de C ne joue aucun rôle particulier. Mais si le couple exceptionnel de C est celui qui est perpendiculaire à l'axe de rotation et si cet axe est pris pour axe des z, il y a simplement ceci de modifié, c'est que, si à un couple de C autre que le couple exceptionnel correspond toujours un groupement de m_1 couples isotropes sur C_1, tous les couples de C, appartenant au même groupement de m couples, conduisent tous au même groupement de m_1 couples sur C_1.

Si donc je pars d'un cône C comme nous l'avons fait, nous arrivons à un cône C_1 : nous pouvons continuer la transformation sur C_1, mais à condition de faire jouer le rôle exceptionnel à un autre couple de ce cône C_1. Et alors le nombre des paramètres de forme de la courbe (M) augmentera à chaque fois.

18. Je vais donner un exemple précis de cône unicursal à directrice sphérique non unicursale. Je pousserai même la discussion de façon à établir la réalité du type obtenu, car j'ai bien spécifié dans tout ce Chapitre que la notion de réalité reste le point délicat.

Je recopie les équations (49) en remplaçant q^2 par q et k^2 par ρ^3. J'obtiens ainsi

$$(68)\quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{q(q^3-\rho^3)^3(q^3-\mathrm{A}^2)}{(1-\rho^3q^3)\left\{\mathrm{A}\rho^3(q^3+1)+\left[\mathrm{A}(1+5\rho^3+\rho^6)+2\rho^{\frac{3}{2}}(1+\mathrm{A}^2)(1+\rho^3)\right](q^6+q^3)\right\}'} \\ \mu = \dfrac{(1-\rho^3q^3)^3(1-\mathrm{A}^2q^3)}{q(q^3-\rho^3)\left\{\mathrm{A}\rho^3(q^3+1)+\left[\mathrm{A}(1+5\rho^3+\rho^6)+2\rho^{\frac{3}{2}}(1+\mathrm{A}^2)(1+\rho^3)\right](q^6+q^3)\right\}'} \end{cases}$$

formules où A et ρ sont deux nombres réels, ρ étant positif, qui ont été calculés. Il y a trois couples isotropes conjugués d'indice 2, fournis par les valeurs de q : ρ, $\frac{1}{\rho}$; $j\rho$, $\frac{j}{\rho}$; $j^2\rho$, $\frac{j^2}{\rho}$ et un couple d'indice 11 fourni par $q=0$, $q=\infty$. Ce dernier couple ne doit pas jouer le rôle exceptionnel; je fais donc la substitution $q=\frac{Q+\rho}{\rho Q+1}$ de façon que $Q=0$ donne $q=\rho$, et $Q=\infty$ donne $q=\frac{1}{\rho}$.

On obtient aisément, en posant

$$B = A(1+5\rho^3+\rho^6) + 2\rho^3(1+A^2)(1+\rho^3) :$$

$$(69)\quad \begin{cases} \lambda = Q\,\dfrac{\rho+Q}{\rho Q+1}\,\dfrac{\left\{\begin{array}{l}(1-\rho^2)^2Q^2[(\rho+Q)^3-A^2(\rho Q+1)^3]\\ \quad\times[(\rho^4+\rho^2+1)Q^2+3\rho Q(1+\rho^2)+3\rho^2]^3\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}[\rho^6+\rho^2+1+3\rho(1+\rho^2)Q+3\rho^2Q^2]\\ \quad\times\{A\rho^3[(\rho+Q)^3+(\rho Q+1)^3]\\ \qquad+B(\rho+Q)^3(\rho Q+1)^3[(\rho+Q)^3+(\rho Q+1)^3]\}\end{array}\right\}}, \\ \mu = \dfrac{1}{Q}\,\dfrac{\rho Q+1}{\rho+Q}\,\dfrac{\left\{\begin{array}{l}(1-\rho^2)^2[(\rho Q+1)^2-A^2(\rho+Q)^3]\\ \quad\times[\rho^6+\rho^2+1+3\rho Q(1+\rho^2)+3\rho^2Q^2]^3\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}[(\rho^4+\rho^2+1)Q^2+3\rho(1+\rho^2)Q+3\rho^2]\\ \quad\times\{A\rho^3[(\rho+Q)^3+(\rho Q+1)^3]\\ \qquad+B(\rho+Q)^3(\rho Q+1)^3[(\rho+Q)^3+(\rho Q+1)^3]\}\end{array}\right\}}, \end{cases}$$

Nous sommes dans le second cas : le couple exceptionnel $Q=0$, $Q=\infty$ se compose des deux droites $x\pm iy=0$, $z=0$; chacune de ces valeurs de Q donne un cycle de degré 1 et classe 3; les formules mettent encore en évidence deux autres cycles isotropes de degré 1 et classe 3 donnés par $(\rho^4+\rho^2+1)Q^2+3\rho Q(1+\rho^2)+3\rho^2=0$ et les deux cycles respectivement conjugués

$$\rho^6+\rho^2+1+3\rho Q(1+\rho^2)+3\rho^2Q^2=0;$$

enfin, chacun des cycles $\rho+Q=0$ ou $\rho Q+1=0$ est de degré 11. Nous avons déjà dit que la droite $z=0, x+iy=0$ porte quatre cycles, de même la droite $z=0, x-iy=0$.

Dans ces conditions, je considère le cône C_1 :

$$(70)\quad \begin{cases} \lambda = Q^r\,\dfrac{Q^{15m}+A_1Q^{14m}+A_2Q^{13m}+\ldots+A_{14}Q^m}{B(Q^{15m}+1)+B_1(Q^{14m}+Q^m)+\ldots+B_7(Q^{8m}+Q^{7m}}, \\ \mu = \dfrac{1}{Q^r}\,\dfrac{1+A_1Q^m+A_2Q^{2m}+\ldots+A_{14}Q^{14m}}{B(Q^{15m}+1)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+B_7(Q^{8m}+Q^{7m})}, \end{cases}$$

où $A_1,\ldots,A_{14}$, B, $B_1,\ldots,B_7$ sont 22 constantes réelles. J'écris l'identité

$$(71)\quad \begin{aligned}&(x^{15}+A_1x^{14}+\ldots+A_{14}x)(1+A_1x+\ldots+A_{14}x)\\ &\quad+[B(x^{15}+1)+B_1(x^{14}+x)+\ldots]^2\\ &\equiv \frac{B^2}{k^{11}k_1^2k_2^2}(x+k)^{11}(kx+1)^{11}(x+k_1)^2(k_1x+1)^2(x+k_2)^2(k_2x+1)^2,\end{aligned}$$

où k est réel et k_1, k_2 sont deux constantes imaginaires conjuguées. L'identité (71) donne 15 relations entre les 25 inconnues $A_1, \ldots, B_7$, k, k_1, k_2. Je dois maintenant annuler tous les vecteurs périodes; je vais passer en revue toutes les génératrices isotropes de C_1, sauf le cycle $Q = \infty$. Je pose $Q^m = x$ de façon à pouvoir écrire $\lambda = Q^r \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, $\mu = \dfrac{1}{Q^r}\dfrac{f_1(x)}{\varphi(x)}$, où f, f_1, φ, φ_1 sont trois polynomes; on a

$$
(72)\quad
\left\{
\begin{aligned}
1+\lambda\mu &= \frac{B^2(x+k)^{11}(kx+1)^{11}(x+k_1)^2(k_1x+1)^2(x+k_2)^2(k_2x+1)^2}{\varphi^2},\\
\frac{d\lambda}{1+\lambda\mu} &= \frac{Q^{r-1}\,dQ}{B^2}\,\frac{rf\varphi + mx(\varphi f' - f\varphi')}{(x+k)^{11}(kx+1)^{11}(x+k_1)^2(k_1x+1)^2(x+k_2)^2(k_2x+1)^2},\\
\frac{d\mu}{1+\lambda\mu} &= \frac{dQ}{Q^{r+1}B^2}\,\frac{-rf_1\varphi + mx(\varphi f_1' - f_1\varphi')}{(x+k)^{11}(kx+1)^{11}(x+k_1)^2(k_1x+1)^2(x+k_2)^2(k_2x+1)^2},\\
\frac{\lambda\,d\mu - \mu\,d\lambda}{1+\lambda\mu} &= \frac{dQ}{QB^2}\,\frac{-2rff_1 + mx(f_1'f - ff_1')}{(x+k)^{11}(kx+1)^{11}(x+k_1)^2(k_1x+1)^2(x+k_2)^2(k_2x+1)^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

On suppose r positif; m est supérieur à 1 et premier avec r; la fraction $\dfrac{1}{1+\lambda\mu}\dfrac{d\lambda}{dQ}$ n'admet pas $Q = 0$ comme pôle (même si $m = 1$). La fraction $\dfrac{1}{1+\lambda\mu}\dfrac{d\mu}{dQ}$ admet $Q = 0$ pour pôle d'ordre $r+1$, mais la partie polaire relative à $Q = 0$ est de la forme

$$\frac{a}{Q^{r+1}} + \frac{a_1}{Q^{r+1-m}} + \frac{a_2}{Q^{r+1-2m}} + \ldots.$$

de sorte qu'il ne peut y avoir de terme en $\dfrac{1}{Q}$ (mais pour $m = 1$, ceci ne subsisterait plus). Enfin, on a évidemment une simplification importante pour l'intégrale $\int \dfrac{\lambda\,d\mu - \mu\,d\lambda}{1+\lambda\mu}$, car $\dfrac{dQ}{Q} = \dfrac{m\,dx}{x}$; ceci, d'ailleurs, est général quand Oz est axe de rotation $\dfrac{2\pi}{m}$; comme f contient x en facteur, la différentielle $\dfrac{\lambda\,d\mu - \mu\,d\lambda}{1+\lambda\mu}$ ne contient pas x en dénominateur (que m soit égal ou non à l'unité). Donc le vecteur période relatif à $Q = 0$ est nul automatiquement si $m > 1$ (pour $m = 1$, on a une condition et une seule).

Soit maintenant un quelconque des cycles isotropes du groupement

$x + k_1 = 0$; il suffit d'écrire que le plan tangent à C_1 le long de la génératrice support du cycle coupe C_{11}, non pas seulement suivant deux, mais bien quatre génératrices confondues avec cette génératrice support : cela fait deux conditions seulement. En vertu de ce fait que le cône C_1 se reproduit par une rotation de l'angle $\frac{2\pi}{m}$ autour de Oz, cette propriété appartient automatiquement à toutes les autres génératrices du groupement; en vertu de la symétrie de C_1 par rapport à zOx, il en sera de même pour le groupement $k_1 x + 1 = 0$. Si l'on remarque que l'ensemble des deux groupements $x + k_1 = 0$, $k_1 x + 1 = 0$ admet comme conjugué l'ensemble des deux groupements $x + k_2 = 0$, $k_2 x + 1 = 0$, on voit que les deux équations écrites sont à compléter par les deux équations conjuguées; autrement dit, l'ensemble de ces quatre groupements donne quatre équations à coefficients réels entre les inconnues réelles $A_1, \ldots, A_{11}, B, \ldots, B_7, k$, $k_1 + ik_2, k_1 - ik_2$. Un procédé de calcul simple met d'ailleurs ce fait en évidence : on peut dans un système d'axes réels $\omega\lambda\mu$ auxiliaire considérer les équations (70) comme définissant une courbe réelle, symétrique par rapport à la bissectrice $\lambda - \mu = 0$, admettant en plus une transformation birationnelle imaginaire $\lambda_1 = j^r\lambda$, $\mu_1 = \frac{\mu}{j^r}$, j étant une racine quelconque de $X^m - 1 = 0$. Il suffit d'exprimer que la tangente au point obtenu en prenant une racine de $Q^m + k_1 = 0$ a un contact du troisième ordre avec la courbe : en prenant les coordonnées homogènes $Q^{2r} f(Q^m), f_1(Q^m), Q^r \varphi(Q^m)$, ceci se traduit par ce fait que deux polynomes entiers en $x = Q^m$ sont divisibles par $x + k_1$; ce polynôme est réciproque, de sorte que $k_1 x + 1$ se trouve être en même temps diviseur. Le calcul ainsi fait se trouve valable même si m devient égal à 1 : donc pour le cône C obtenu pour $m = 1, r = 1$, elles sont vérifiées.

Il ne reste plus qu'à étudier les deux groupements $x + k = 0$ et $kx + 1 = 0$; pour des raisons analogues aux précédentes, ces deux groupements étant à la fois symétriques et conjugués l'un de l'autre, et chacun d'eux se composant de m génératrices s'échangeant par des rotations successives de l'angle $\frac{2\pi}{m}$ autour de Oz, on a seulement trois équations à coefficients réels entre $A_1, A_2, \ldots, B, \ldots, k, k_1, k_2$. Ces

équations subsistent même pour $m = 1$ et par suite pour C. Pour bien établir ce point, on peut raisonner ainsi : décomposons en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{Q^{r-1}} \frac{1}{1+\lambda\mu} \frac{d\lambda}{dQ}$, fraction qui ne dépend que de x, et soit $\frac{F(x)}{(x+k)^{11}(kx+1)^{11}}$ la partie polaire relative à l'ensemble des deux racines $x = -k$ et $x = -\frac{1}{k}$; F est un certain polynome entier. La différentielle $Q^r \, dQ \frac{F(x)}{(x+k)^{11}(kx+1)^{11}}$ doit être algébrique, donc est la différentielle d'une certaine fraction de la forme $\frac{Q^r F_1(x)}{(x+k)^{10}(kx+1)^{10}}$, où F_1 est un certain polynome; en écrivant cela, on a l'identité

$$[r F_1 + m x F_1'](x+k)(kx+1) - 10 m x (2kx + 1 + k^2) F_1(x) \equiv F;$$

cela exige que F_1 soit d'un degré inférieur de deux unités à celui de F et alors l'identification donne par l'élimination des coefficients de F_1 deux relations entre les coefficients de F. Tous ces calculs se font sans avoir aucune hypothèse à faire sur r ou m, donc subsistent pour $m = 1$. Comme la symétrie zOx, Q en $\frac{1}{Q}$, échange λ avec μ, ces deux équations n'ont pas besoin d'être écrites de nouveau pour $\frac{d\mu}{1+\lambda\mu}$ et le même procédé fournit une équation unique pour $\frac{\lambda d\mu - \mu d\lambda}{1+\lambda\mu}$ provenant des deux groupements $x + k = 0$, $kx + 1 = 0$.

Je rassemble donc toutes les équations obtenues pour C_1, m étant supérieur à 1 : l'identité (71) a donné quinze équations, l'ensemble des quatre groupements $x + k_1 = 0$, $k_1 x + 1 = 0$, $x + k_2 = 0$, $k_2 x + 1 = 0$ a donné quatre équations et l'ensemble des deux groupements $x + k = 0$, $kx + 1 = 0$ trois équations : cela fait un total de vingt-deux équations : il est tout à fait important de montrer que ces vingt-deux équations sont indépendantes quels que soient m et r; elles auront alors une solution générale à trois paramètres et une infinité seront même réelles, comme nous le verrons. Nous établirons même que ces vingt-deux équations, toujours nécessaires pour $m = 1$, restent suffisantes pour $m = 1$, la relation supplémentaire trouvée si $m = 1$ étant conséquence des vingt-deux équations déjà écrites.

Pour vérifier ce point, nous remarquerons que si l'un des cycles pris parmi les cycles $Q^m + k_1 = 0$ admet comme support la droite $x + iy = 0$, $z = 0$, il en sera de même pour tous les cycles $Q^m + k_1 = 0$; il suffit que le numérateur de λ soit divisible par $Q^m + k_1$, ce qui fait une condition. De même, une seule condition assurera que tous les cycles $Q^m + k_2 = 0$ aient la même droite pour support. Donc, parmi les courbes $(\mathcal{C}_1)$ à trois paramètres, nous devrons en obtenir un groupe particulier à un paramètre, si nous ajoutons ces conditions géométriques. Or, il est plus simple de préparer le calcul directement en écrivant les équations définissant un cône C_2 :

$$(73)\quad \begin{cases} \lambda = Q^r \dfrac{(Q^m + k_1)^3 (Q^m + k_2)^3}{(k_1 Q^m + 1)(k_2 Q^m + 1)} \\ \qquad \times \dfrac{Q^{7m} + A_1 Q^{6m} + A_2 Q^{5m} + A_3 Q^{4m} + A_4 Q^{3m} + A_5 Q^{2m} + A_6 Q_m}{B(Q^{11m} + 1) + B_1 (Q^{10m} + Q^m) + \ldots + B_5 (Q^{6m} + Q^{5m})}, \\ \mu = \dfrac{1}{Q^r} \dfrac{(1 + k_1 Q^m)^3 (1 + k_2 Q^m)^3}{(Q^m + k_1)(Q^m + k_2)} \dfrac{1 + A_1 Q^m + \ldots + A_6 Q^{6m}}{B(Q^{11m} + 1) \ldots + B_5 (Q^{6m} + Q^{5m})}, \end{cases}$$

avec l'identité

$$\begin{aligned} (74)\quad & (x + k_1)^2 (x + k_2)^2 (1 + k_1 x)^2 (1 + k_2 x)^2 (x^7 + A_1 x^6 + \ldots + A_6 x) \\ & \times (1 + A_1 x + \ldots + A_6 x^6) + [B(x^{11} + 1) + \ldots + B_5 (x^6 + x^5)]^2 \\ & \equiv \frac{B^2}{k^{11}} (x + k)^{11} (kx + 1)^{11}. \end{aligned}$$

Si l'on recommençait le dénombrement des inconnues et des équations, on trouverait comme inconnues $A_1, \ldots, A_6, B, \ldots, B_5, k, k_1, k_2$ en nombre 15, l'identité (74) donnant onze conditions; quant aux résidus, cette fois tout a déjà été écrit pour les groupements $Q^m + k_1 = 0$, $Q^m + k_2 = 0$ (que m soit ou non égal à 1) et $k_1 Q^m + 1 = 0$, $k_2 Q^m + 1 = 0$; si m est supérieur à 1, $Q = 0$ ne donne rien et l'ensemble $Q^m + k = 0$, $kQ^m + 1 = 0$ donne trois conditions; donc on a seulement quatorze équations pour lesquelles il suffira de montrer qu'elles sont indépendantes, quels que soient m ou r; il y aura alors des solutions à un paramètre; nous verrons même qu'il y en a une infinité de réelles. Nous verrons encore comme plus haut que, même pour $m = 1$, ces quatorze équations sont suffisantes.

Je continue encore par le même procédé : dans ce cône C_2, comme plus haut, il suffit d'une condition supplémentaire pour que les génératrices du groupement $x + k = 0$ coïncident avec la droite $x + iy = 0$, $z = 0$; on peut encore préparer le calcul en écrivant *a priori* les équations définissant un cône C_3 :

$$(75)\quad \begin{cases} \lambda = Q^r \dfrac{Q^m + k}{kQ^m + 1} \dfrac{(Q^m + k_1)^3 (Q^m + k_2)^3}{(k_1 Q^m + 1)(k_2 Q^m + 1)} \\ \qquad \times \dfrac{Q^{5m} + A_1 Q^{4m} + \ldots + A_5 Q^m}{B(Q^{9m} + 1) + B_1 (Q^{8m} + Q^m) + \ldots + B_4 (Q^{5m} + Q^{4m})}, \\ \mu = \dfrac{1}{Q^r} \dfrac{1 + kQ^m}{k + Q^m} \dfrac{(1 + k_1 Q^m)^3 (1 + k_1 Q^m)^3}{(Q^m + k_1)(Q^m + k_2)} \dfrac{1 + A_1 Q^m + \ldots + A_4 Q^{4m}}{B(Q^{9m} + 1) + \ldots B_4 (Q^{5m} + Q^{4m})}, \end{cases}$$

avec l'identité

$$(76)\quad \begin{aligned} &(x + k_1)^3 (x + k_2)^3 (1 + k_1 x)^3 (1 + k_2 x)^3 (x^5 + A_1 x^4 + \ldots + A_5 x) \\ &\quad \times (1 + A_1 x + \ldots + A_4 x^4) + [B(x^9 + 1) \ldots + B_4 (x^5 + x^4)]^2 \\ &\quad \equiv \frac{B^2}{k^9} (x + k)^9 (kx + 1)^9. \end{aligned}$$

Le dénombrement direct est toujours d'accord avec nos prévisions, car on a pour inconnues A_1, A_2, A_3, A_4 ; B, B_1, B_2, B_3, B_4 ; k, $k_1 + ik_2$, $k_1 - ik_2$ au nombre de 12 ; l'identité (76) donne neuf relations et, pour ce cône C_3 comme pour le cône C_2, les conditions d'algébricité de $(\mathfrak{C}_3)$ se réduisent aux trois conditions provenant de l'ensemble $x + k = 0$, $kx + 1 = 0$. On a douze équations à douze inconnues, il ne reste donc plus de paramètre arbitraire si les équations sont, comme nous l'annonçons, effectivement indépendantes.

Ce point sera établi en toute rigueur de la façon suivante : les équations obtenues soit pour C_1, soit pour C_2, soit pour C_3 sont nécessaires et suffisantes pour m supérieur à 1 ; pour $m = 1$, elles sont toujours nécessaires, mais rien ne prouve jusqu'ici qu'elles sont suffisantes. Je vais démontrer qu'elles sont encore suffisantes même pour $m = 1$. Pour plus de netteté, je renvoie la démonstration plus bas. Admettons ce point acquis.

Étudions le système relatif à C_3 : nous avons douze équations entre les douze inconnues réelles A_1, A_2, A_3, A_4 ; B_1, ..., B_4 ; k, $k_1 + ik_2$,

$k_1 - ik_2$. Ce système dépend du paramètre fractionnaire $\frac{r}{m}$; or, pour $r = m = 1$, nous avons su le résoudre complètement; la solution est donnée par la formule (69) et la solution numérique obtenue est d'ordre de multiplicité égal à l'unité, en tous les cas impair et, de plus, elle est réelle : donc, pour $\frac{r}{m}$ suffisamment voisin de 1, il existe bien des cônes C_3 *réels* donnant une courbe $(\mathcal{A}_1)$ réelle unicursale sans paramètres; dans les formules (75), les quantités $A_1, \ldots, B, \ldots, k$, $k_1 + ik_2$, $k_1 - ik_2$ pourront être développées en séries entières procédant suivant les puissances croissantes de $\frac{r}{m} - 1$ et à coefficients réels. Les quantités $A_1, \ldots, B$, $k_1 + ik_2$, $k_1 - ik_2$ sont des fonctions algébriques de $\frac{r}{m}$ qui sont réelles dans un certain champ de variation pour $\frac{r}{m}$; nous pouvons remarquer que, si k_1 et k_2 sont réelles séparément et non imaginaires conjuguées, rien d'essentiel n'est modifié, C_3 ou C_2 ou C_1 restent réels, les groupements $x + k_1 = 0$ et $k_1 x + 1 = 0$ sont alors à la fois symétriques par rapport à zOx et conjugués, de même les deux groupements $x + k_2 = 0$ et $k_2 x + 1 = 0$; autrement dit, il suffit de considérer $k_1 + k_2$ et $k_1 k_2$, comme c'est naturel *a priori*, au lieu de k_1 et k_2 séparément. Abstraction faite de la réalité, le cône C_3 existe quelle que soit la fraction $\frac{r}{m}$, sauf pour des valeurs exceptionnelles de $\frac{r}{m}$. L'existence de cônes C_3 réels prouve l'existence de cônes C_2 et de cônes C_1 réels, les cônes C_2 étant à un paramètre et les cônes C_1 à trois paramètres.

On remarquera que le cône C_3 pouvait être considéré seul, car les équations de C_3 sont calquées exactement sur celles du cône C, suivant le procédé général développé précédemment. Mais il était bon de se débarrasser complètement de cette particularité géométrique qui consiste à donner la même génératrice isotrope pour support à plusieurs cycles, propriété qui est commode en tous cas pour construire certains types particuliers. Le mode de démonstration employé a signalé en passant certains procédés d'intégration qui peuvent être commodes soit pour avoir effectivement les coordonnées d'un point de la courbe $(\mathcal{A})$, soit pour dénombrer les relations, et qui s'appliquent quelle que soit la courbe $(\mathcal{A})$ étudiée. Par exemple, si l'on prend

les formules (72), on peut écrire

$$\int \frac{d\lambda}{1+\lambda\mu} = \frac{Q^{r} x\, F(x)}{(x+k)^{10}(kx+1)^{10}(x+k_1)(k_1x+1)(x+k_2)(k_2x+1)},$$

où $F(x)$ est un polynome de degré 23 : l'identification des deux membres donnera à la fois le polynome F et des relations d'identification, au nombre de six. Il suffit de remplacer Q par $\frac{1}{Q}$ et x par $\frac{1}{x}$ pour avoir l'intégrale $\int \frac{d\mu}{1+\lambda\mu}$. Le résultat est bien conforme à la théorie des fractions rationnelles, car il y a six séries de pôles pour la fraction $\frac{1}{1+\lambda\mu}\frac{d\lambda}{dQ}$ et chacune des six séries donne une seule condition résiduelle.

De même l'intégrale $\int \frac{\lambda\, d\mu - \mu\, d\lambda}{1+\lambda\mu}$, qui ne dépend que de x et qui change de signe quand x est remplacé par $\frac{1}{x}$, donnerait une relation

$$\int \frac{\lambda\, d\mu - \mu\, d\lambda}{1+\lambda\mu} = \frac{x\left(x-\frac{1}{x}\right)\Phi(x)}{(x+k)^{10}(kx+1)^{10}(x+k_1)(k_1x+1)(x+k_2)(k_2x+1)},$$

où Φ est un polynome réciproque en x de degré 22; l'identification des deux membres donne trois relations; la théorie des fractions rationnelles permettait de le prévoir comme plus haut, en raison de l'existence de six séries de pôles; la série $x=-k_1$ et $x=\frac{-1}{k_1}$ devant donner le même résultat, ainsi que $x=-k_2$ ou $x=\frac{-1}{k_2}$ et $x=-k$ et $x=\frac{-1}{k}$, on n'a que trois relations. D'autre part, nous avons vu directement au Chapitre II (§ 3) que si un cycle d'indice σ et degré 1 existe, si l'on annule la composante du vecteur période polaire correspondant relative à Ox et Oy, la constante relative à Oz est nulle aussi; donc ici les trois nouvelles relations se réduisent à une seule, en tenant compte des précédentes. On retrouve donc bien le résultat annoncé : sept relations résiduelles pour C_1; on pourrait opérer de même pour les autres cônes C_2 et C_3.

19. Le seul point à démontrer maintenant est donc que, si m devient

égal à 1, la relation fournie par $\int \frac{d\mu}{1+\lambda\mu}$ et le pôle $Q=0$ est une conséquence des relations fournies par les couples autres que $Q=0$ et $Q=\infty$.

C'est un cas particulier d'une proposition plus générale. Je considère un cône C algébrique réel; je le définis par la courbe σ trace de ce cône sur le plan $z=1$; soit $F(\xi,\eta)=0$ l'équation de cette solution dans son plan; le point réel ou complexe ξ est supposé balayer tout le plan de la variable complexe et je marque sur ce plan les racines de l'équation $1+\xi^2+\eta^2=0$; j'entoure chacune d'elles d'un petit cercle; les intégrales

$$\tau\int\frac{d\eta}{1+\xi^2+\eta^2},\qquad -\tau\int\frac{d\xi}{1+\xi^2+\eta^2},\qquad \tau\int\frac{\eta\,d\xi-\xi\,d\eta}{1+\xi^2+\eta^2},$$

prises dans le sens direct le long d'un de ces cercles Γ, sont les composantes du vecteur période polaire relatif au cycle isotrope correspondant de C; soient $a+a'i$, $b+b'i$, $c+c'i$ ces composantes.

Si je prends maintenant les intégrales conjuguées des précédentes, elles se rapportent au cercle Γ' symétrique de Γ par rapport à l'axe réel, le cercle Γ' étant décrit dans le sens inverse cette fois : donc le vecteur période polaire du cycle isotrope conjugué a pour composantes $-a+a'i$, $-b+b'i$, $-c+c'i$. Donc, s'il y a n couples isotropes conjugués, la somme géométrique des $2n$ vecteurs périodes polaires est nulle et ceci se traduit par

$$\sum_1^n a'=0,\qquad \sum_1^n b'=0,\qquad \sum_1^n c'=0.$$

Imaginons maintenant que, parmi les cycles isotropes, il y en ait un qui soit du type classe supérieure au degré. Je suppose les axes pris de sorte que la droite isotrope support soit $z=0$, $x+iy=0$. Alors, en nous reportant au Chapitre II (§ 4), puisque nous avons pour la courbe $(\mathfrak{A})$

$$x+iy=-\tau i\,I_1,\qquad x-iy=\tau i\,I_2,\qquad 2z=-\tau i\,I_3,$$

et que I_1 et I_3 ne donnent pas de singularité logarithmique pour ce cycle, on en déduit que les trois composantes du vecteur période polaire sont

$$a+a'i,\qquad -a'+ai,\qquad 0,$$

et le vecteur polaire du cycle conjugué donne

$$-a+a'\iota, \qquad a'+a\iota, \qquad 0.$$

Supposons donc qu'on ait annulé tous les vecteurs périodes relatifs aux autres couples; dans ces conditions, comme la somme de tous les vecteurs est nulle, la somme des deux vecteurs écrits précédemment est nécessairement nulle : donc $a=0$, $a'=0$; donc chacun des deux vecteurs est nul automatiquement, comme conséquence de la nullité des autres.

Or, dans l'étude faite au numéro précédent, qu'il s'agisse de C_1, C_2 ou C_3, on a annulé les vecteurs périodes de tous les cycles autres que $Q=0$, $Q=\infty$; chacun de ces deux cycles est du type classe supérieur au degré, et cela que m soit égal à 1 ou supérieur à 1.

Si m est supérieur à 1, les deux cycles $Q=0$, $Q=\infty$ ont leur vecteur automatiquement nul; si m est égal à l'unité, ces deux vecteurs ne sont plus nuls automatiquement, mais les équations obtenues en écrivant que tous les autres vecteurs sont nuls ont pour conséquence que les deux vecteurs en question le soient; par exemple, pour $m=1$, $r=1$, la relation $A_{14}=0$, s'il s'agit de C_1, sera une conséquence des deux équations formées; de même pour C_2 ou C_3 ($A_6=0$, s'il s'agit de C_2; $A_4=0$, s'il s'agit de C_3).

Quant au calcul fait pour C_3, en supposant $m=1$, $r=1$, il a été fait avec d'autres variables au paragraphe 12, de façon à n'avoir que deux inconnues au lieu de douze, mais cela importe peu pour apprécier l'ordre de multiplicité de la solution numérique obtenue; de la sorte, nous sommes bien certains que les douze équations sont indépendantes.

L'exemple ainsi obtenu en toute rigueur est le premier exemple connu jusqu'à présent de courbe unicursale à torsion constante dont le cône directeur des binormales a une directrice sphérique non unicursale. Nous en trouverons d'autres au Chapitre suivant, et en particulier le type le plus simple correspondant à quatre couples isotropes d'indice 5.

(*A suivre.*)

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME TRENTE-SIXIÈME.

Pages.

Étude de la stabilité de l'équilibre des paramètres principaux et secondaires d'un système dans le cas régulier d'intégration par quadratures, par M. *Étienne Delassus* 1

Sur certaines transformations fonctionnelles et leur application à la théorie des fonctions permutables, par M. *Joseph Pérès* 37

Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres 1 (deuxième partie), par M. *Lucien Godeaux* 51

Sur l'intégration des fonctions non bornées et sur les définitions constructives, par M. *Émile Borel* 71

Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes (premier Mémoire), par M. *Gaston Julia* 93

Sur la notion de nombre caractéristique de M. Liapounoff, par M. *Émile Cotton* ... 127

Sur les fonctions automorphes d'un nombre quelconque de variables, par M. *Georges Giraud* 187

Sur les singularités mobiles des intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles et sur leur intégrale générale, par M. *S. Stoïlow* 235

Sur les courbes à torsion constante, par M. *Bertrand Gambier* 263

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
Quai des Grands-Augustins, 55.
59908-20